Fiche d'exercices : Déterminants

Exercice 1 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \ ; \ \begin{vmatrix} 7 & 10 & 3 \\ 30 & 38 & 12 \\ 37 & 50 & 15 \end{vmatrix} \ ; \ \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \ ; \ \begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a+b & a+c & b+c \\ a^2+b^2 & a^2+c^2 & b^2+c^2 \\ a^3+b^3 & a^3+c^3 & b^3+c^3 \end{vmatrix} \ ; \ \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \ ; \ \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} \ ; \ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & x_2 \\ x_1 & \dots & \dots & x_1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \ ; \ \begin{vmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2 \end{vmatrix} \ ; \ \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & & \ddots & \\ \binom{n+p}{0} & \binom{n+p}{1} & \dots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix}$$

Exercice 2 Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ dans les cas suivants :

$$a_{ij} = \min(i,j) \ ; \ a_{ij} = \max(i,j) \ ; \ a_{ij} = ij \ ; \ a_{ij} = i+j \ ; \ a_{ij} = |i-j|.$$

Exercice 3 Montrer, sans les calculer, que les déterminants suivants sont nuls :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} \ ; \ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} \ ; \ \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ \cos\theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta \end{vmatrix}$$

Exercice 4 Soit $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$. Exprimer en fonction de D les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} e & d & f \\ h & g & i \\ b & a & c \end{vmatrix} \ ; \ \begin{vmatrix} a+2g & b+2h & c+2i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \ ; \ \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} \ ; \ \begin{vmatrix} 12c-3i & 4b-h & 4a-g \\ 3i & h & g \\ -6f & -2e & -2d \end{vmatrix}.$$

Exercice 5 Calculer le *déterminant de Vandermonde* $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

Exercice 6

1) La famille $((6,2,3),(-2,5,6),(4,1,5))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

2) La famille $(3X^2-X+2, 2X^2-1, aX^2+X+4)$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

3) La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 15 & 16 \end{pmatrix}\right)$ est-elle une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 7 Soit $A = \begin{pmatrix} a & bi \\ bi & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} c & di \\ di & c \end{pmatrix}$ où $i^2 = -1$. Calculer le déterminant de AB de deux manières différentes et en déduire une formule.

Exercice 8 À quelle condition la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & b+c & c+a \\ ab & bc & ca \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Exercice 9 Montrer que si A est une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec n impair alors A n'est pas inversible. Et si n est pair ?

Exercice 10 Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme $P_A = \det(A - XI_n)$. Les racines de P_A sont appelées valeurs propres de la matrice A.

1) Quel est le degré de P_A ? Que vaut son coefficient constant ?

2) Montrer que λ est une valeur propre de A si et seulement si le système $AX = \lambda X$ a des solutions non nulles (appelées vecteurs propres de A).

3) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 Soient $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Calculer $\det(AJ)$ et en déduire $\det A$. Généraliser en dimension n.

Exercice 12 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ c & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \dots & c & a \end{pmatrix}$ et soit J la matrice dont tous les coefficients valent 1. Montrer que $\det(A + xJ)$ est un polynôme de degré 1 en x et en déduire $\det A$.

Exercice 13 Calculer le déterminant des endomorphismes suivants :

1. $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} P(t)dt$.

2. $\varphi : \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K)$ défini par $\varphi(M) = M^T$.

3. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ défini par $f(z) = az + b\overline{z}$ où $a, b \in \mathbb{C}$ (où $\mathbb{C}$ est muni de sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

Exercice 14 Montrer que le déterminant d'une matrice carrée dont les coefficients diagonaux sont des entiers impairs et les autres des entiers pairs est un entier impair. Que dire d'une telle matrice ?

Exercice 15 Montrer que le déterminant d'une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\{-1, 1\}$ est divisible par 2^{n-1}.