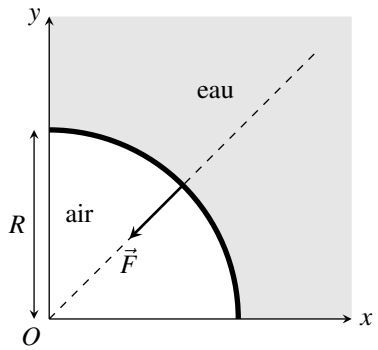
Corrigé DM27

Exercice : Force de pression sur un barrage

1. Le plan $\theta = \pi/4$ est un plan de symétrie du problème. Par conséquent la force de pression résultante doit être incluse dans ce plan. Sachant que la pression à l'intérieur du volume d'eau est plus élevée que celle à l'intérieur du volume d'air, on s'attend à ce que la force résultante soit dirigée vers l'intérieur du barrage (voir figure ci-contre).



2. La force de pression élémentaire exercée par l'air sur l'élément de surface du barrage situé en M vaut : $\boxed{\mathrm{d}\vec{F}_{\text{air}} = P_0 \mathrm{d}\vec{S} = P_0 R \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z \vec{n}}$.

On détermine la force résultante en intégrant sur toute la surface du barrage :

$$\vec{F}_{\text{air}} = \int_0^{\pi/2}\int_0^H P_0 R\vec{n}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = P_0 R\int_0^{\pi/2}\int_0^H \vec{n}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

Attention car ici le vecteur $\vec{n}$ dépend de θ, il doit rester à l'intérieur de l'intégrale ! On commence par séparer l'intégrale en deux à l'aide du théorème de Fubini :

$$\vec{F}_{\text{air}} = P_0 R\int_0^H \mathrm{d}z\int_0^{\pi/2}\vec{n}\mathrm{d}\theta = P_0 RH\int_0^{\pi/2}\vec{n}\mathrm{d}\theta$$

Si l'on veut poursuivre le calcul il faut d'abord **projeter** $\vec{n}$ dans la base cartésienne (les vecteurs $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$, fixes, pourront quant à eux sortir de l'intégrale). On a $\vec{n} = \cos\theta\,\vec{u}_x + \sin\theta\,\vec{u}_y$ donc :

$$\vec{F}_{\text{air}} = P_0 RH\left(\int_0^{\pi/2}\cos\theta\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_x + \int_0^{\pi/2}\sin\theta\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_y\right) = P_0 RH\left([\sin\theta]_0^{\pi/2}\vec{u}_x + [-\cos\theta]_0^{\pi/2}\vec{u}_y\right)$$

On aboutit finalement à l'expression suivante : $\boxed{\vec{F}_{\text{air}} = P_0 RH\left(\vec{u}_x + \vec{u}_y\right)}$.

3. On écrit la loi fondamentale de la statique des fluides dans l'eau : $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho_e g \iff \mathrm{d}P = -\rho_e g\mathrm{d}z$. L'eau est supposée incompressible donc la masse volumique ρ_e est **constante**.
On intègre la loi fondamentale entre $z = H$ et z quelconque, sachant que par continuité de la pression à la traversée de la surface libre au sommet du barrage, $P(H) = P_0$.

$$\int_{P_0}^{P(z)}\mathrm{d}P = \int_H^z -\rho_e g\mathrm{d}z = -\rho_e g\int_H^z \mathrm{d}z \iff P(z) - P_0 = -\rho_e g(z-H)$$
$$\iff \boxed{P(z) = P_0 - \rho_e g(z-H)}$$

4. La force de pression élémentaire exercée par l'eau sur un élément de surface du barrage situé en un point M quelconque vaut : $\mathrm{d}\vec{F}_{\text{eau}} = P(z)R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z(-\vec{n})$. On intègre en suivant la même méthode qu'à la question 2. On remplace $P(z)$ par son expression puis, à l'aide du théorème de Fubini, on sépare l'intégrale en deux.

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\text{eau}} &= -\int_0^{\pi/2}\int_0^H P(z)R\vec{n}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\
&= -R\int_0^{\pi/2}\int_0^H (P_0 - \rho_e g(z-H))\,\vec{n}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\
&= -R\int_0^H P_0 - \rho_e g(z-H)\mathrm{d}z\int_0^{\pi/2}\vec{n}\mathrm{d}\theta \\
&= -R\left[P_0 z - \frac{1}{2}\rho_e g(z-H)^2\right]_0^H\left(\vec{u}_x + \vec{u}_y\right)
\end{aligned}$$

On obtient finalement : $\boxed{\vec{F}_{\text{eau}} = -R\left(P_0 H + \frac{1}{2}\rho_e g H^2\right)\left(\vec{u}_x + \vec{u}_y\right)}$.

5. La force de pression résultante qui s'exerce sur le barrage vaut :

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{air}} + \vec{F}_{\text{eau}} = -\frac{1}{2}R\rho_e g H^2\left(\vec{u}_x + \vec{u}_y\right)$$

Sachant que $\left\|\vec{u}_x + \vec{u}_y\right\| = \sqrt{2}$, on obtient bien le résultat attendu : $\boxed{\left\|\vec{F}\right\| = \frac{R\rho_e g H^2}{\sqrt{2}}}$.

6. La longueur du barrage vaut : $L = R\times\frac{\pi}{2} = 568\,\text{m} \implies R = \frac{2L}{\pi} = 361{,}6\,\text{m}$. L'application numérique donne : $\boxed{\left\|\vec{F}\right\| = 2{,}33\cdot 10^{11}\,\text{N}}$.