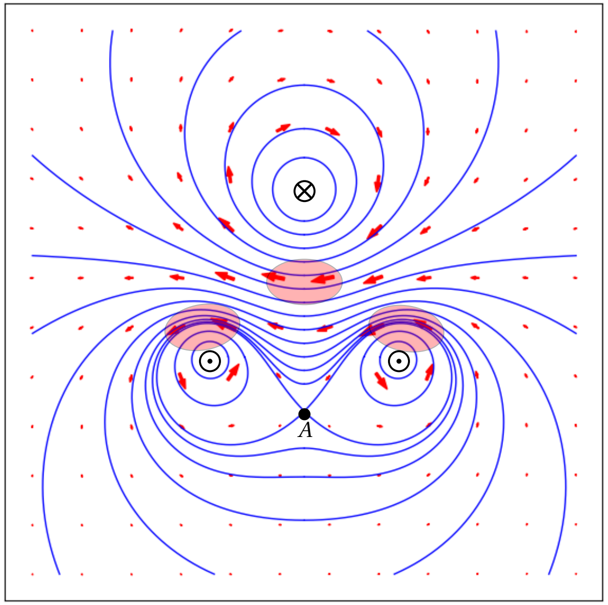
TD 27 : Champ $\overrightarrow{B}$, forces de Laplace - corrigé

⋆ Exercice 1 : Spectres magnétiques



Les lignes de champ s'enroulent autour des courants, on en situe trois sur cette carte. Les orientations sont obtenues avec la règle de la main droite.

Il y a un point d'annulation du champ (point A), à l'intersection de plusieurs lignes de champ.

Le champ est plus intense dans les zones de convergence des lignes de champ. On en identifie trois, représentées par des ovales.

Le champ est uniforme dans une zone où les lignes de champ sont parallèles les unes aux autres. On ne distingue pas de telle zone sur cette carte.

⋆ Exercice 2 : Champ créé par une bobine torique

1. Étant donnée la géométrie des courants, il est préférable d'utiliser le système de coordonnées **cylindriques**.

2. Il y a invariance par rotation d'angle θ. Par ailleurs, le plan $(\mathrm{M}, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de **symétrie** pour les courants. On en déduit que :

$$\boxed{\vec{B}(\mathrm{M}) = B_\theta(r,z)\vec{u}_\theta}$$

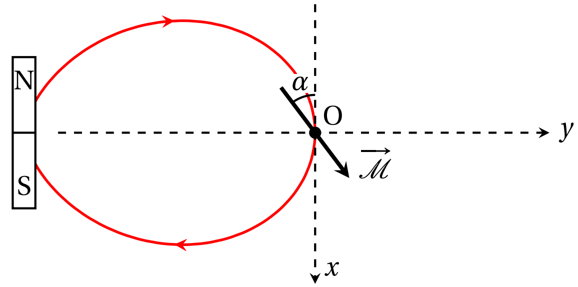
3. Comme le champ est orthoradial en tout point de l'espace, on en déduit que les lignes de champ à l'intérieur de la bobine sont **des cercles centrés sur l'axe** $(\mathbf{O}y)$.

⋆ Exercice 3 : Mesure d'un champ magnétique

1. Compte tenu de l'orientation des courants, le champ magnétique produit par le solénoïde est suivant $\boxed{+\vec{u}_y}$. Sa norme vaut :

$$\boxed{\left\|\vec{B}_\mathrm{s}(\mathrm{O})\right\| = \mu_0 \frac{N}{L} i = 1{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}}$$

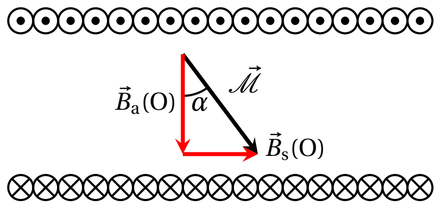
2.



Le champ magnétique $\vec{B}_\mathrm{a}(\mathrm{O})$ est dirigé suivant $\boxed{+\vec{u}_x}$.

3. Les lignes de champ produites par un aimant circulent du pôle nord en direction du pôle sud. On en déduit que le pôle nord est situé au-dessus et le pôle sud en-dessous.

4. Comme l'illustre le schéma ci-dessous, l'aiguille aimantée s'oriente dans la direction et le sens du champ résultant $\vec{B}_\mathrm{tot} = \vec{B}_\mathrm{s}(\mathrm{O}) + \vec{B}_\mathrm{a}(\mathrm{O})$.



Géométriquement, on reconnaît que $\tan\alpha = \dfrac{\left\|\vec{B}_\mathrm{s}(\mathrm{O})\right\|}{\left\|\vec{B}_\mathrm{a}(\mathrm{O})\right\|} \iff \boxed{\left\|\vec{B}_\mathrm{a}(\mathrm{O})\right\| = \dfrac{\left\|\vec{B}_\mathrm{s}(\mathrm{O})\right\|}{\tan\alpha} = 2{,}4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}}$.

⋆⋆ Exercice 4 : Balance de Cotton

1. Les forces de Laplace ne s'exercent évidemment que dans la partie du circuit plongée dans le champ $\vec{B}$. Sur les parties circulaires, les courants sont orthoradiaux, el le champ magnétique est axial, par conséquent les actions de Laplace sont radiales (elles sont dans la direction du point O). On en déduit que **les actions de Laplace qui s'exercent sur les deux parties circulaires ne produisent pas de moment par rapport au point O**.

2. On calcule désormais la résultante des actions de Laplace qui s'exercent sur la partie horizontale du circuit :

$$\vec{F}_\mathrm{lap} = iL\vec{u}_x \wedge B\vec{u}_z = -iBL\vec{u}_y$$

Puisque le circuit est rectiligne, parcouru par un courant stationnaire et plongé dans un champ magnétique uniforme, on peut calculer le moment résultant des actions de Laplace en appliquant la force résultante au centre du segment, c'est-à-dire à une distance a du point O (on note P ce point, il vérifie $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = -a\vec{u}_x$) :

$$\vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{lap}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} \wedge \vec{F}_{\mathrm{lap}} = -a\vec{u}_x \wedge -iBL\vec{u}_y \iff \boxed{\vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{lap}} = aiBL\vec{u}_z}$$

3. La balance est en équilibre, ce qui signifie que le moment du poids de la masse m compense celui des actions de Laplace. On calcule ce moment :

$$\vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{P}) = a'\vec{u}_x \wedge (-mg\vec{u}_y) = -mga'\vec{u}_z$$

On écrit la condition d'équilibre de la balance :

$$\vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{lap}} + \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{P}) = \vec{0} \iff aiBL = mga' \iff \boxed{B = \frac{mga'}{aiL}}$$

4. L'AN donne : $\boxed{B = 1{,}6\,\mathrm{T}}$.

⋆⋆ Exercice 5 : Moment magnétique orbital d'un électron

1. L'électron effectue une révolution par période $T = \frac{2\pi}{\Omega}$. Sachant qu'il transporte une charge $q = -e$, le courant moyen qui circule dans cette “spire” vaut :

$$\boxed{I = -\frac{e}{T} = -\frac{e\Omega}{2\pi}}$$

2. Le moment magnétique de l'électron se calcule, par analogie avec la spire de la manière suivante :

$$\vec{\mu} = I\vec{S} = I\left(\pi r^2\right)\vec{u}_z = -\tfrac{1}{2}er^2\vec{\Omega}$$

où r est le rayon de la spire et $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_z$ est le vecteur rotation de l'électron.

On calcule maintenant le moment cinétique de l'électron, toujours dans la base cylindrique :

$$\vec{L} = m_e r^2\Omega\vec{u}_z = m_e r^2\vec{\Omega}$$

On constate que ces deux vecteurs sont bien proportionnels entre eux :

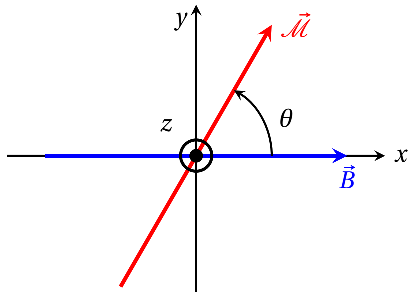
$$\vec{\mu} = -\tfrac{e}{2m_e}\vec{L} \iff \boxed{\gamma_e = -\frac{e}{2m_e}}$$

3. Le moment magnétique de l'électron s'exprime de la manière suivante :

$$\|\vec{\mu}\| = |\gamma_e|\,\|\vec{L}\| = n|\gamma_e|\hbar \iff \boxed{\mu_B = |\gamma_e|\hbar = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9{,}3\cdot 10^{-24}\,\mathrm{A\cdot m^2}}$$

⋆⋆ Exercice 6 : Petites oscillations d'une aiguille aimantée

On représente schématiquement l'aiguille, dont la position angulaire est mesurée par un angle θ dont l'origine est la direction du champ magnétique extérieur :



On a vu en cours que le champ magnétique exerce sur l'aiguille aimantée un couple qui tend à ramener l'aiguille dans la direction et le sens de $\vec{B}$. La position d'équilibre stable de l'aiguille est donc $\theta = 0$. On exprime le couple exercé par le champ $\vec{B}$ pour une direction θ quelconque :

$$\vec{\Gamma}_{\mathrm{lap}} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = \mathcal{M}(\cos\theta\vec{u}_x + \sin\theta\vec{u}_y) \wedge B\vec{u}_x = -B\mathcal{M}\sin\theta\vec{u}_z$$

On applique ensuite le TMC à l'aiguille, par rapport à l'axe orienté (Oz), dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$J\ddot{\theta} = \vec{\Gamma}\cdot\vec{u}_z = -B\mathcal{M}\sin\theta \iff \ddot{\theta} + \frac{B\mathcal{M}}{J}\sin\theta = 0$$

Cette équation est de type “pendulaire”. Elle se linéarise dans l'hypothèse d'oscillations de petites amplitudes autour de $\theta = 0$ ($\sin\theta \simeq \theta$) :

$$\ddot{\theta} + \frac{B\mathcal{M}}{J}\theta = 0$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{B\mathcal{M}}{J}}$, donc de période :

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{B\mathcal{M}}}}$$

⋆⋆ Exercice 7 : Pendule électrique

1. On détermine dans un premier temps la résultante des actions de Laplace qui s'exercent sur la tige :

$$\vec{F}_{\mathrm{lap}} = I\ell\vec{u}_r \wedge (-B\vec{u}_z) = IB\ell\vec{u}_\theta$$

Puisque la tige est rectiligne, parcourue par un courant stationnaire et plongée dans un champ magnétique uniforme, on peut calculer le moment résultant des actions de Laplace en appliquant la force résultante au centre P de la tige, c'est-à-dire à une distance $\frac{\ell}{2}$ du point O :

$$\vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}_{lap}) = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}_{lap} = \tfrac{\ell}{2}\vec{u}_r \wedge IB\ell\vec{u}_\theta \iff \boxed{\vec{\mathcal{M}}_{lap} = \frac{1}{2}IB\ell^2\vec{u}_z}$$

2. À l'équilibre, le moment du poids de la tige compense celui des actions de Laplace. On calcule le moment du poids, en l'appliquant en centre de gravité de la tige qui se trouve également en P :

$$\vec{\mathcal{M}}_{\rm O}(\vec{P}) = \frac{\ell}{2}\vec{u}_r \wedge mg(\cos\alpha\,\vec{u}_r - \sin\alpha\,\vec{u}_\theta) = -\frac{1}{2}mg\ell\sin\alpha\,\vec{u}_z$$

On écrit la condition d'équilibre de la tige :

$$\vec{\mathcal{M}}_{\rm O}(\vec{F}_{\rm lap}) + \vec{\mathcal{M}}_{\rm O}(\vec{P}) = \vec{0} \iff \frac{1}{2}IB\ell^2 = \frac{1}{2}mg\ell\sin\alpha \iff \boxed{\sin\alpha = \frac{IB\ell}{mg}}$$