

Correction du DNS 30

EXERCICE 1

1) a) Notons A_n l'événement "Jouer avec la pièce A au n^e lancer".

La famille $(A_n, \overline{A_n})$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}|\overline{A_n})P(\overline{A_n}) \\ &= \frac{1}{2}P(A_n) + \frac{1}{3}(1 - P(A_n)) \\ &= \frac{1}{6}P(A_n) + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

soit $p_{n+1} = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{3}$.

b) La suite (p_n) est arithmético-géométrique. Posons $q_n = p_n - \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$q_{n+1} = p_{n+1} - \alpha = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{3} - \alpha = \frac{1}{6}(q_n + \alpha) + \frac{1}{3} - \alpha = \frac{1}{6}q_n - \frac{5\alpha}{6} + \frac{1}{3}.$$

Ainsi, en prenant $\alpha = 2/5$, la suite (q_n) est géométrique de raison $1/6$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$q_n = q_1 \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \left(p_1 - \frac{2}{5}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

car $p_1 = 1/2$, et par suite

$$p_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Notons F_n l'événement "Obtenir face au n^e lancer". Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} P(F_n) &= P(F_n|A_n)P(A_n) + P(F_n|\overline{A_n})P(\overline{A_n}) \\ &= \frac{1}{2}p_n + \frac{2}{3}(1 - p_n) \\ &= -\frac{1}{6}p_n + \frac{2}{3} \\ &= -\frac{1}{15} - \frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{2}{3} \\ &= \frac{3}{5} - \frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^n. \end{aligned}$$

3) D'après la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} P(A_n | F_n) &= \frac{P(F_n | A_n)P(A_n)}{P(F_n)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right)}{\frac{3}{5} - \frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^n} \\ &= \frac{2 \times 6^n + 3}{6 \times 6^n - 1} \end{aligned}$$

qui tend vers $\frac{1}{3}$ quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

1) a) La seule partition de E_1 est $\{\{1\}\}$.

Les partitions de E_2 sont $\{\{1, 2\}\}$ et $\{\{1\}, \{2\}\}$.

Les partitions de E_3 sont $\{\{1, 2, 3\}\}$, $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$, $\{\{2, 3\}, \{1\}\}$ et $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.

b) On en déduit que $B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 = 5$ et que $B_{1,1} = 1$, $B_{2,1} = 1$, $B_{2,2} = 1$, $B_{3,1} = 1$, $B_{3,2} = 3$ et $B_{3,3} = 1$.

2) a) La seule partition de E_n de cardinal 1 est $\{E_n\}$ donc $B_{n,1} = 1$.

La seule partition de E_n de cardinal n est $\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$ donc $B_{n,n} = 1$.

b) Une partition de E_n de cardinal $n - 1$ est nécessairement formée d'un sous-ensemble de cardinal 2 et de $n - 2$ singletons (sous-ensembles de cardinal 1), par exemple $\{\{1, 2\}, \{3\}, \dots, \{n\}\}$. Une fois choisi le sous-ensemble de cardinal 2, on n'a qu'une possibilité pour les singletons.

Par conséquent $B_{n,n-1}$ est égal au nombre de sous-ensembles de E_n de cardinal 2, c'est-à-dire à $\binom{n}{2}$.

c) Pour construire une partition de E_n de cardinal 2, on choisit un sous-ensemble de E_n non vide et différent de E_n (il y a donc $2^n - 2$ choix possibles), et le deuxième sous-ensemble de la partition est son complémentaire.

Mais en procédant ainsi on obtient chaque partition deux fois : les partitions $\{A, \overline{A}\}$ et $\{\overline{A}, A\}$ sont les mêmes.

Il faut donc diviser par 2 le nombre de choix précédent. Ainsi $B_{n,2} = \frac{2^n - 2}{2}$.

3) a) Pour construire une partition de E_n de cardinal k on peut soit :

- partir d'une partition de E_{n-1} de cardinal $k - 1$ et ajouter le singleton $\{n\}$ à cette partition,
- partir d'une partition de E_{n-1} de cardinal k et ajouter l'élément n à un des k sous-ensembles de cette partition.

Le premier point donne $B_{n-1,k-1}$ partitions de E_n (le choix de la partition de E_{n-1}) et le second en donne $kB_{n-1,k}$ (le choix de la partition de E_{n-1} puis le choix du sous-ensemble auquel on ajoute n). On a ainsi

$$B_{n,k} = B_{n-1,k-1} + kB_{n-1,k}.$$

b) On obtient le tableau suivant :

	0	1	2	3	4	5
1	0	1				
2	0	1	1			
3	0	1	3	1		
4	0	1	7	6	1	
5	0	1	15	25	10	1

Par exemple $B_{4,2} = B_{3,1} + 2B_{3,2} = 1 + 2 \times 3 = 7$.

En faisant la somme des coefficients de la n^e ligne on obtient B_n . On a donc $B_4 = 1 + 7 + 6 + 1 = 15$ et $B_5 = 1 + 15 + 25 + 10 + 1 = 52$.

c) En prenant $k = n - 1$ dans la relation de 3)a) on obtient

$$B_{n,n-1} = B_{n-1,n-2} + (n - 1)B_{n-1,n-1} = B_{n-1,n-2} + n - 1$$

pour tout $n \geq 2$. On a ainsi

$$\begin{aligned} B_{2,1} &= B_{1,0} + 1 = 1 \\ B_{3,2} &= B_{2,1} + 2 = 1 + 2 \\ B_{4,3} &= B_{3,2} + 3 = 1 + 2 + 3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

donc $B_{n,n-1} = 1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{(n - 1)n}{2}$ qui est bien égal au $\binom{n}{2}$ trouvé en 2)b).

d) En prenant $k = 2$ dans la relation de 3)a) on obtient

$$B_{n,2} = B_{n-1,1} + 2B_{n-1,2} = 1 + 2B_{n-1,2}$$

pour tout $n \geq 3$. On voit ainsi que la suite $(B_{n,2})_{n \geq 2}$ est arithmético-géométrique.

Posons $v_n = B_{n,2} - \alpha$ et déterminons α tel que (v_n) soit géométrique. On a

$$v_{n+1} = B_{n+1,2} - \alpha = 1 + 2B_{n,2} - \alpha = 1 + 2(v_n + \alpha) - \alpha = 2v_n + \alpha + 1$$

pour tout $n \geq 2$. On prend donc $\alpha = -1$. Alors

$$v_n = v_2 2^{n-2} = (B_{2,2} + 1) 2^{n-2} = 2^{n-1}$$

pour tout $n \geq 2$ et donc

$$B_{n,2} = v_n - 1 = 2^{n-1} - 1$$

pour tout $n \geq 2$. On retrouve bien le résultat de 2)c).

4) a) Une partition de E_{n+1} contenant A est de la forme $\{A\} \cup \mathcal{P}$ où $\mathcal{P}$ est une partition de $E_{n+1} \setminus A$.

Or le cardinal de $E_{n+1} \setminus A$ est $n - k$, donc le nombre de partitions de $E_{n+1} \setminus A$ est le même que celui de E_{n-k} , c'est-à-dire B_{n-k} .

Par exemple, une partition de E_6 contenant $\{3, 6\}$ est de la forme $\{\{3, 6\}\} \cup \mathcal{P}$ où $\mathcal{P}$ est une partition de $\{1, 2, 4, 5\}$, il y en a donc B_4 .

b) Il y a $\binom{k}{n}$ parties de E_{n+1} contenant $n + 1$ et de cardinal $k + 1$ (l'élément $n + 1$ étant dedans, il reste à choisir k éléments compris entre 1 et n).

D'après la question précédente, une fois cette partie choisie, il y a B_{n-k} partitions de E_{n+1} qui la contiennent.

Comme k peut prendre les valeurs $0, \dots, n$ on obtient

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}.$$

En effectuant le changement d'indice $j = n - k$ on obtient

$$B_{n+1} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{n-j} B_j = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} B_j.$$

c) On obtient

$$B_6 = \binom{5}{0} B_0 + \binom{5}{1} B_1 + \binom{5}{2} B_2 + \binom{5}{3} B_3 + \binom{5}{4} B_4 + \binom{5}{5} B_5 = 203.$$

5)

`d = {0: 1}`

```
def B(n):
    if n not in d:
        s = 0
        for k in range(n):
            s += binomial(n-1, k) * B(k)
        d[n] = s
    return d[n]
```