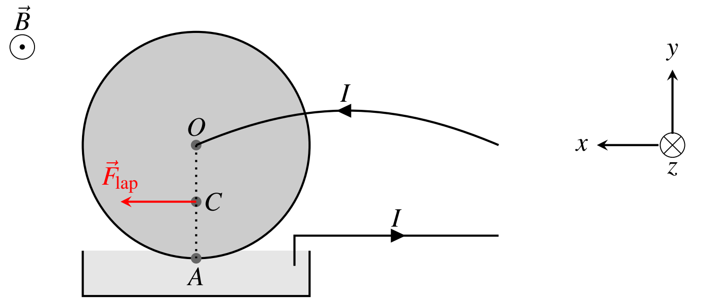
Corrigé DS9

Exercice 1 : Roue de Barlow

1. La force de Laplace qui s'exerce sur le disque vaut :

$$\vec{F}_{\text{lap}} = I\,\overrightarrow{OA} \wedge \vec{B} = I(-R\vec{u}_y) \wedge (-B\vec{u}_z) \iff \boxed{\vec{F}_{\text{lap}} = IBR\,\vec{u}_x}$$

On représente cette force sur le schéma ci-dessous.



2. Le bras de levier de la force de Laplace vaut $b(\vec{F}_{\text{lap}}) = \frac{R}{2}$ et la règle de la main droite indique que le moment est positif : $\boxed{\mathscr{M}_z(\vec{F}_{\text{lap}}) = \frac{1}{2}IBR^2}$.

3. On applique le théorème du moment cinétique au disque, par rapport à l'axe (Oz), dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le disque est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction du pivot $\vec{R}$, aux actions de Laplace et au couple de frottement.

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_z(\vec{P}) + \mathscr{M}_z(\vec{R}) + \mathscr{M}_z(\vec{F}_{\text{lap}}) + \Gamma$$

Le poids et la réaction du pivot s'appliquent en O donc leur moment est nul (bras de levier nul). On conclut :

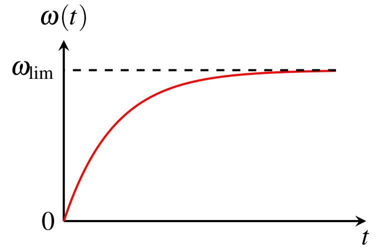
$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}IBR^2 - \alpha\omega \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{J}\omega = \frac{IBR^2}{2J}}$$

4. On résout l'équation précédente. La solution particulière est $\omega_p = \frac{IBR^2}{2\alpha}$ et la solution générale est de la forme :

$$\omega(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{IBR^2}{2\alpha} \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{J}{\alpha}$$

Avec la condition initiale $\omega(0) = 0$ on trouve finalement :

$$\boxed{\omega(t) = \frac{IBR^2}{2\alpha}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$$



La vitesse angulaire de rotation limite vaut $\boxed{\omega_{\text{lim}} = \frac{IBR^2}{2\alpha}}$.

5. On convertit la vitesse angulaire de rotation limite en unité SI : $\omega_{\text{lim}} = 1500\,\text{tours/min} = 157\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. L'intensité vaut :

$$\boxed{I = \frac{2\alpha\omega_{\text{lim}}}{BR^2} = 1{,}0\,\text{A}}$$

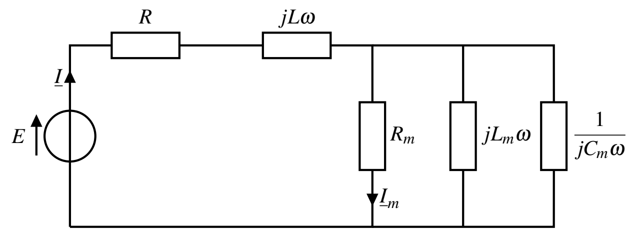
La durée de la phase d'accélération s'identifie à celle du régime transitoire : $\boxed{\Delta t \sim 5\tau = 10\,\text{s}}$.

Exercice 2 : Haut-parleur électrodynamique

1. Les trois composants sont branchés en dérivation donc on peut les rassembler en **sommant les admittances** :

$$\boxed{\underline{Y}_m = \frac{1}{R_m} + \frac{1}{jL_m\omega} + jC_m\omega = \frac{1}{R_m} + j\left(C_m\omega - \frac{1}{L_m\omega}\right)}$$

2. On représente le schéma du circuit dans l'espace complexe.



On applique la loi du pont diviseur de courant :

$$\underline{I}_m = \frac{\frac{1}{R_m}}{\frac{1}{R_m} + \frac{1}{jL_m\omega} + jC_m\omega}\underline{I} = \frac{\underline{I}}{R_m\underline{Y}} \iff \boxed{\frac{\underline{I}}{\underline{I}_m} = R_m\underline{Y}}$$

3. D'après l'expression fournie :

$$\frac{1}{\eta} = 1 + \frac{R}{R_m}\cdot R_m^2\,|\underline{Y}|^2 = 1 + RR_m\left[\frac{1}{R_m^2} + \left(C_m\omega - \frac{1}{L_m\omega}\right)^2\right] = 1 + \frac{R}{R_m}\left[1 + R_m^2\left(C_m\omega - \frac{1}{L_m\omega}\right)^2\right]$$

On en déduit que :

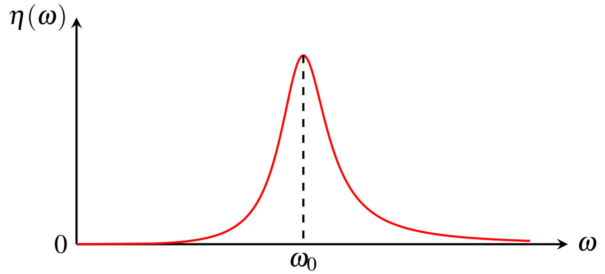
$$\boxed{\eta = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_m}\left[1 + R_m^2\left(C_m\omega - \frac{1}{L_m\omega}\right)^2\right]}}$$

On identifie la pulsation propre et le facteur de qualité :

$$\begin{cases} \dfrac{Q}{\omega_0} = R_mC_m \\ Q\omega_0 = \dfrac{R_m}{L_m} \end{cases} \iff \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_mC_m}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = R_m\sqrt{\frac{C_m}{L_m}}}$$

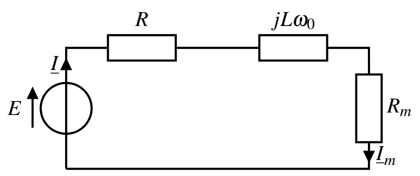
4. Le rendement est maximal lorsque le terme $(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2$ s'annule, c'est-à-dire pour $\boxed{\omega = \omega_0}$. Il est alors égal à $\boxed{\eta_{\max} = \frac{1}{1+\frac{R}{R_m}}}$.

On trace ci-dessous l'allure du graphe de $\omega \mapsto \eta(\omega)$.



5. La largeur de la bande passante vaut $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$. À pulsation propre fixée il faut choisir un facteur de qualité **le plus faible possible** pour avoir une bande passante la plus large possible.

6. À la pulsation ω_0 on a $\underline{Y}_m = \frac{1}{R_m}$. L'association des trois composants en dérivation se comporte comme une simple résistance R_m.



Les résistances R et R_m sont alors en série donc $\boxed{i(t) = i_m(t)}$. On exprime $\underline{I}$ en appliquant la loi des mailles (ou la loi de Pouillet) :

$$E = (R + jL\omega_0 + R_m)\underline{I} \iff \underline{I} = \frac{E}{R + R_m + jL\omega_0}$$

On revient dans l'espace réel en calculant le module et l'argument :

$$|\underline{I}| = \frac{E}{\sqrt{(R+R_m)^2 + L^2\omega_0^2}} \quad \text{et} \quad \arg(\underline{I}) = -\arg(R + R_m + jL\omega_0) = -\arctan\left(\frac{L\omega_0}{R+R_m}\right)$$

On conclut : $\boxed{i(t) = i_m(t) = \frac{E}{\sqrt{(R+R_m)^2 + L^2\omega_0^2}} \cos\left(\omega_0 t - \arctan\left(\frac{L\omega_0}{R+R_m}\right)\right)}$.

Exercice 3 : Champ créé par un solénoïde infini

1. Le modèle du solénoïde infini est valable car $L > 10R$.

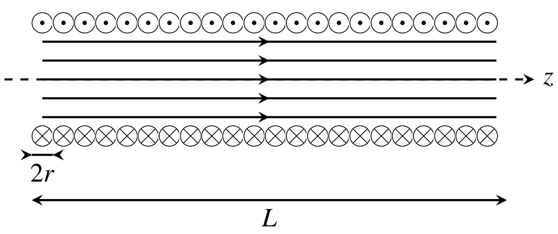
2. On se place en coordonnées cylindriques.

Invariances : Il y a invariance par translation selon z et par rotation d'angle θ.

Symétries : Pour M un point quelconque de l'espace, le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie des courants donc le champ $\vec{B}(M)$ est dirigé selon $\vec{u}_z$.

On conclut que l'on doit chercher le champ magnétique sous la forme $\boxed{\vec{B} = B_z(r)\vec{u}_z}$.

3. Le champ est toujours colinéaire à $\vec{u}_z$ donc les lignes de champ sont des droites parallèles à (Oz). L'orientation est donnée par la règle de la main droite.



Les lignes de champ magnétique sont des droites parallèles entre elles donc **le champ est uniforme à l'intérieur du solénoïde**.

4. Le champ créé dans la bobine a pour expression :

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I \iff \boxed{N = \frac{BL}{\mu_0 I} = 2{,}7 \cdot 10^3}$$

5. Puisque les spires sont au contact les unes des autres alors chaque couche de fil contient un nombre de spires : $N_{1\text{ couche}} = \frac{L}{2r}$ (voir figure ci-dessus). On a calculé le nombre total de spires à la question précédente, ce qui permet de conclure :

$$\boxed{N_c = \frac{N}{N_{1\text{ couche}}} = \frac{2rN}{L} = 2}$$

La bobine est constituée de **2 couches de fil**.

6. Soit ℓ la longueur du fil, une fois déroulé. Le volume de cuivre correspondant vaut $V = \pi r^2 \ell$. Chaque spire a la forme d'un cercle de rayon R donc $\ell = 2\pi R \times N$ (pour simplifier on néglige la différence entre les rayons des deux couches de fil, car $r \ll R$). On conclut :

$$\boxed{m = \rho V = 2\pi^2 \rho r^2 RN = 1{,}3\,\text{kg}}$$

7. En considérant à nouveau que toutes les spires ont la forme d'un cercle de rayon R, on trouve que :

$$\boxed{\mathscr{M} = NI \times \pi R^2 = 15\,\text{A} \cdot \text{m}^2}$$