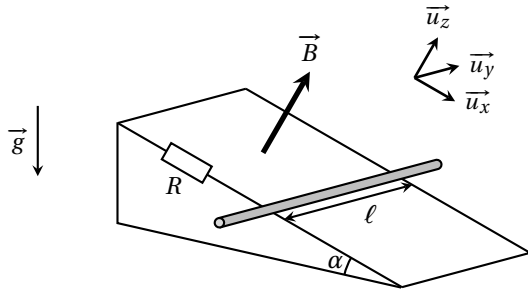


TD 30 : Circuit mobile dans un champ magnétique permanent

★★ Exercice 1 : Rails de Laplace



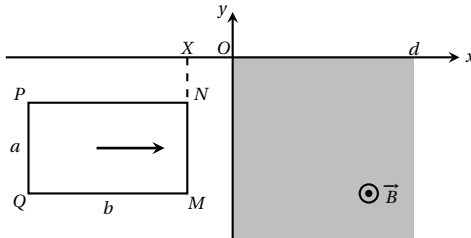
Une tige conductrice de masse m peut glisser sans frottement sur deux rails de Laplace inclinés d'un angle α par rapport à l'horizontale et orientés par un axe (Ox) .

On place une résistance R en série dans le circuit. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ permanent et uniforme, orthogonal au plan du circuit ($\vec{B} = B\vec{u}_z$). À $t = 0$, on lâche la tige sans vitesse initiale depuis la position $x = 0$. On néglige le coefficient d'auto-inductance du circuit.

Déterminer la loi de vitesse $v(t)$ de la tige.

★★ Exercice 2 : Freinage électromagnétique

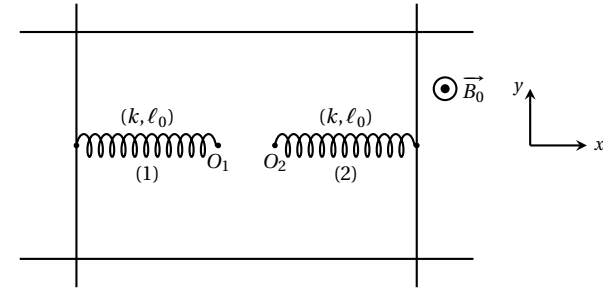
Une spire conductrice rectangulaire $MNPQ$ mobile de côtés a et b , de masse m , de résistance R et d'inductance négligeable est en translation parallèlement à (Ox) .



Elle traverse une zone de longueur d supérieure à b , où le champ magnétique est uniforme ($\vec{B} = B\vec{u}_z$). On admet que le champ est nul en dehors de cette zone, sans se préoccuper du problème lié à la discontinuité du champ $\vec{B}$. On néglige aussi toute force autre que magnétique. $X(t)$ représente l'abscisse du côté MN , de longueur a , et v désigne la vitesse du cadre.

1. Dans quelle région de l'espace doit se trouver le cadre pour qu'un courant induit puisse circuler à l'intérieur ? Exprimer ce courant induit, puis la force de Laplace qui s'exerce sur le cadre, en fonction des données du problème.
2. Écrire les équations différentielles vérifiées par $v(t)$ et par $v(X)$ (On pourra utiliser la notation $\frac{d}{dt} = \frac{d}{dX} \times \frac{dX}{dt}$).
3. Le conducteur entre dans le champ magnétique avec une vitesse v_0 . À quelle condition en ressort-il ? Si cette condition est vérifiée, déterminer la diminution de vitesse Δv .

★★ Exercice 3 : Oscillations couplées



Deux barres métalliques peuvent glisser sans frottement sur deux rails conducteurs horizontaux parallèles et distants de a .

Chaque barre possède une masse m , une résistance $R/2$ et reste perpendiculaire aux rails. Les deux ressorts sont identiques (k, ℓ_0) .

Le système est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}_0$ perpendiculaire aux plans des rails.

À l'instant initial $t = 0$, le ressort (1) est comprimé ($\ell_1(0) = \ell_0 - a'$) et le ressort (2) n'est ni tendu ni comprimé ($\ell_2(0) = \ell_0$), les vitesses initiales sont nulles. On notera $x_1(t)$ et $x_2(t)$ les déplacements (algébriques) des deux tiges par rapport à leur position d'équilibre.

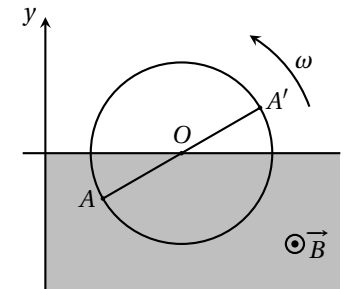
1. Écrire les équations différentielles couplées vérifiées par $x_1(t)$ et $x_2(t)$.
2. On pose $S(t) = x_1(t) + x_2(t)$ et $D(t) = x_2(t) - x_1(t)$. Établir les équations différentielles vérifiées par $S(t)$ et $D(t)$. Que représentent ces grandeurs ?
3. Déterminer le mouvement de deux tiges en régime permanent.

★★ Exercice 4 : Courants induits dans une roue

La circonférence et le diamètre d'une roue de rayon a sont conducteurs et ont la même résistance R .

La roue est mobile autour de l'axe (Oz) , avec une vitesse de rotation ω .

Un champ magnétique permanent $\vec{B} = B\vec{u}_z$ est imposé sur la moitié $y < 0$ de la roue, le champ magnétique étant nul pour $y > 0$. On admettra qu'un tel champ discontinu existe, sachant que c'est une modélisation simplificatrice.

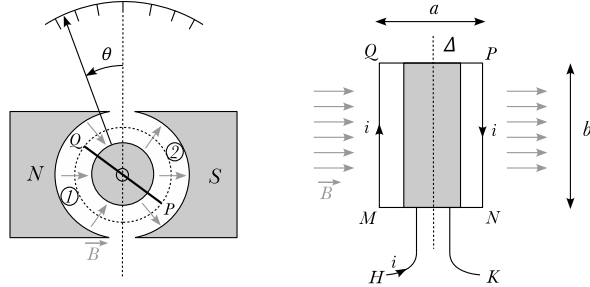


En l'absence de source, déterminer les courants induits dans la roue ainsi que le moment des actions de Laplace par rapport à l'axe de rotation.

TD 30 : Circuit mobile dans un champ magnétique permanent

★★ Exercice 5 : Microampèremètre magnétoélectrique

N spires de fil fin sont bobinées sur un cadre rectangulaire $MNPQ$ de côtés a et b . Un aimant permanent et un noyau de fer créent un champ magnétique permanent qui est approximativement radial et de norme constante B_0 sur les côtés QM et PN du cadre, comme le montrent les schémas ci-dessous.



$\vec{B}$ est porté par $\vec{u}_r$, de norme constante sur les côtés QM et PN , mais sa valeur algébrique est fonction de la "région" considérée :

$$\begin{cases} \vec{B} = -B_0 \vec{u}_r & (\text{région 1}) \\ \vec{B} = B_0 \vec{u}_r & (\text{région 2}) \end{cases}$$

Les schémas ci-dessus montrent le micorampèremètre vu de dessus et mettent en évidence le champ magnétique de type radial.

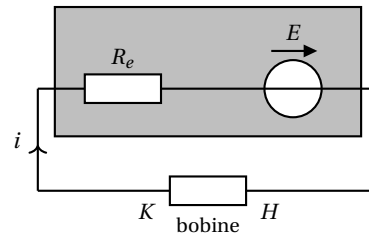
Ce cadre représenté de face sur le schéma ci-dessus peut tourner autour de l'axe Δ et son moment d'inertie par rapport à Δ est J .

Un ressort en spirale (non représenté) assure un couple de rappel élastique : $\mathcal{M}_{\text{rappel}} = -C\theta$

Les frottements mécaniques (frottements de l'air par exemple) sont représentés par un couple de frottement proportionnel à la vitesse : $\mathcal{M}_{\text{frott}} = -h\dot{\theta}$

Une aiguille solidaire du cadre indique la déviation.

Le branchement électrique est décrit ci-contre : la résistance de la bobine est R , son inductance est L ; on suppose que le reste du circuit est représentable par un générateur de Thévenin, de fem E et de résistance R_e .



1. Écrire les équations différentielles vérifiées par $i(t)$ et $\theta(t)$. On posera $\Phi_0 = NB_0ab$. Quelle est la dimension de Φ_0 ?
2. Déterminer θ_p et i_p , valeurs de θ et i en régime permanent.
3. Écrire l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$. On négligera l'influence de l'inductance et on posera :

$$2\lambda = \frac{1}{J} \left(h + \frac{\Phi_0^2}{R + R_e} \right) \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}}$$

4. Décrire sommairement la forme des solutions. En quoi le cas $\lambda = \omega_0$ est-il intéressant pour un appareil de mesure ? Pour quelle valeur R_{ec} de R_e cette condition est-elle réalisée ?

Solutions :

Ex 1 : 1. $v(t) = v_\infty (1 - e^{-t/\tau})$

avec $v_\infty = \frac{mgR \sin \alpha}{B^2 \ell^2}$ et $\tau = \frac{mR}{B^2 \ell^2}$

Ex 2 : 1. $\vec{F} = -\frac{B^2 a^2}{R} \vec{v}$

2. $\frac{dv}{dt} + \frac{B^2 a^2}{mR} v = 0$, $\frac{dv}{dX} = -\frac{B^2 a^2}{mR}$

3. $v_0 > \frac{2B^2 a^2 b}{mR}$, $\Delta v = -\frac{2B^2 a^2 b}{mR}$

Ex 3 : 1.
$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\frac{(B_0 a)^2}{mR} (x_1 - x_2) \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = \frac{(B_0 a)^2}{mR} (x_1 - x_2) \end{cases} \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2.
$$\begin{cases} \ddot{S} + \omega_0^2 S = 0 \\ \ddot{D} + 2\frac{(B_0 a)^2}{mR} \dot{D} + \omega_0^2 D = 0 \end{cases}$$

3. Les deux barres oscillent en phase à la pulsation ω_0 .

Ex 4 : Dans le diamètre : $i = \frac{2\omega B a^2}{5R}$ (orienté vers l'extérieur)

dans les demi-circonférence : $i = -\frac{\omega B a^2}{5R}$ (orientés tous deux "vers la gauche")

Moment des actions de Laplace : $\mathcal{M} = -\frac{B^2 a^4}{5R} \omega$

Ex 5 : 1.
$$\begin{cases} J\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + C\theta + i\Phi_0 = 0 \\ E + \Phi_0 \dot{\theta} = L \frac{di}{dt} + (R + R_e) i \end{cases}$$

2. $i_p = \frac{E}{R + R_e}$, $\theta_p = -\frac{\Phi_0 E}{C(R + R_e)}$ 3. $\ddot{\theta} + 2\lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \omega_0^2 \theta_p$

4. $R_{ec} = \frac{\Phi_0^2}{2J\omega_0 - h} - R$