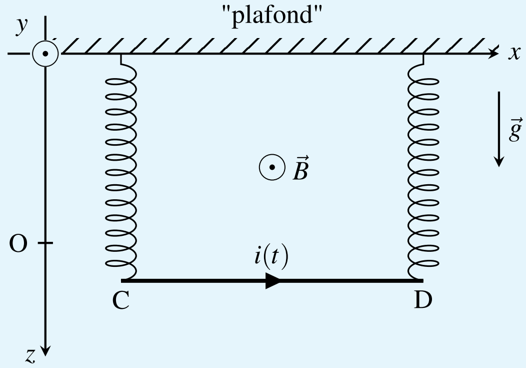
Chapitre 30 : Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

Fiche méthode

1 Montage de type rails de Laplace

Situation : Une tige de cuivre CD de masse m et de longueur d est suspendue par ses deux extrémités à deux ressorts identiques de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 (voir figure ci-contre). Un courant électrique peut circuler à travers les ressorts et le « plafond », on note $i(t)$ son intensité orientée de C vers D. On note R la résistance électrique de tout le circuit et on néglige le phénomène d'induction dans les ressorts et d'auto-induction dans le circuit. On appelle g l'accélération de la pesanteur.

Un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = B\vec{u}_y$ est appliqué orthogonalement au plan de la figure.



1. Le système est au repos. Quelle est la longueur ℓ_{eq} des ressorts dans ce cas ?

On place l'origine de l'axe Oz au niveau de la barre quand elle est à l'équilibre. À l'instant initial $t = 0$ la tige est lancée depuis sa position d'équilibre avec une vitesse $v_0\vec{u}_z$ ($v_0 > 0$).

2. Exprimer i en fonction de B, d, R et $\dot{z} = \dfrac{dz}{dt}$.

3. Exprimer la force de Laplace $\vec{F}_{lap}$ qui s'exerce sur la tige CD. Vérifier qu'elle est toujours résistante et commenter.

4. Établir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$. Par la suite, on posera $\dfrac{B^2d^2}{mR} = 2\alpha$ et $\dfrac{2k}{m} = \omega_0^2$.

5. On suppose que : $\omega_0^2 - \alpha^2 = \gamma^2 > 0$. La tige peut-t-elle osciller ?

Déterminer complètement $z(t)$, en fonction de α et $\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$. Tracer le graphe de $z(t)$.

6. Montrer que $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}m\dot{z}^2 + kz^2\right) + Ri^2 = 0$ et interpréter physiquement.

7. Déterminer, de deux manières différentes, l'énergie électrique reçue par le circuit entre $t = 0$ et $t = +\infty$.

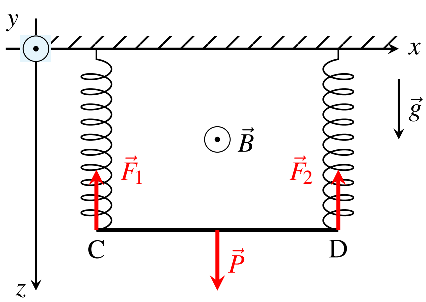
Donnée : pour tout réel $\alpha > 0$ et pour tout réel $\gamma \neq 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\cos(\gamma t) - \frac{\alpha}{\gamma}\sin(\gamma t)\right)^2 e^{-2\alpha t}dt = \frac{1}{4\alpha}$.

► Mettre en équation une situation d'équilibre mécanique

1. Au repos la tige est soumise à son poids $\vec{P}$ et aux forces de rappel élastique $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ exercées par les deux ressorts. On applique le principe fondamental de la statique à la tige CD dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\vec{P} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

On suppose que la tige CD reste à tout instant horizontale, et dans ce cas les forces de rappel sont identiques : $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = -k(\ell_{eq} - \ell_0)\vec{u}_z$.



On projette le PFS sur $\vec{u}_z$:

$$mg - 2k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) = 0 \iff \boxed{\ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{2k}}$$

▶ Mettre en œuvre la loi de Faraday

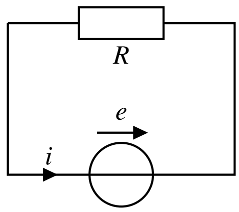
2. On détermine la force électromotrice d'induction e qui apparaît dans la tige CD pendant son mouvement à l'aide de la loi de Faraday. On choisit de l'orienter en convention générateur, ce qui signifie que

$$e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$$

avec $\phi(t)$ le flux magnétique à travers le circuit. Hors équilibre les ressorts ont une longueur $\ell(t) = \ell_{\text{eq}} + z(t)$. Le flux du champ extérieur à travers le circuit vaut $\phi = Bd\ell = Bd(\ell_{\text{eq}} + z)$. On trouve alors que $e = -Bd\dot{z}$.

▶ Établir l'équation électrique du circuit

Si l'on néglige l'auto-induction le comportement électrique du circuit est modélisé simplement par l'association de la f.e.m. induite et de la résistance R.



On détermine l'intensité à l'aide de la loi d'Ohm : $\boxed{i = \frac{e}{R} = -\frac{Bd}{R}\dot{z}}$.

▶ Calculer une force de Laplace

3. La tige CD est plongée dans un champ magnétique uniforme donc

$$\vec{F}_{\text{lap}} = i\overrightarrow{\text{CD}} \wedge \vec{B} = id\vec{u}_x \wedge B\vec{u}_y = iBd\vec{u}_z \iff \boxed{\vec{F}_{\text{lap}} = -\frac{B^2d^2}{R}\dot{z}\vec{u}_z}$$

La force de Laplace s'écrit également sous la forme $\vec{F}_{\text{lap}} = -\frac{B^2d^2}{R}\vec{v}$ avec $\vec{v}$ le vecteur vitesse de la tige. Elle est en permanence dirigée dans le sens contraire du déplacement de la tige et donc toujours résistante. Ceci était attendu car, conformément à la **loi de Lenz**, l'effet mécanique de l'induction s'oppose à ce qui lui a donné naissance, c'est-à-dire le déplacement de la tige.

▶ Mettre en œuvre le PFD

4. En mouvement la tige CD est soumise aux forces $\vec{P}$, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_{\text{lap}}$. On applique le principe fondamental de la dynamique à la tige CD dans le référentiel terrestre supposé galiléen, projeté sur $\vec{u}_z$:

$$m\ddot{z} = mg - 2k(\ell_{\text{eq}} + z - \ell_0) - \frac{B^2d^2}{R}\dot{z}$$

En remplaçant ℓ_{eq} par l'expression obtenue à la question 1 on obtient après quelques calculs l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{B^2d^2}{mR}\dot{z} + \frac{2k}{m}z = 0}$$

▶ Résoudre l'équation d'un oscillateur amorti

5. Cette équation différentielle est celle d'un oscillateur amorti. On écrit son équation caractéristique :

$$r^2 + 2\alpha r + \omega_0^2 = 0$$

Le discriminant est $\Delta = 4\left(\alpha^2 - \omega_0^2\right)$. Il est strictement négatif donc on se trouve en **régime pseudopériodique**. La tige effectue des oscillations exponentiellement amorties .

On détermine les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique :

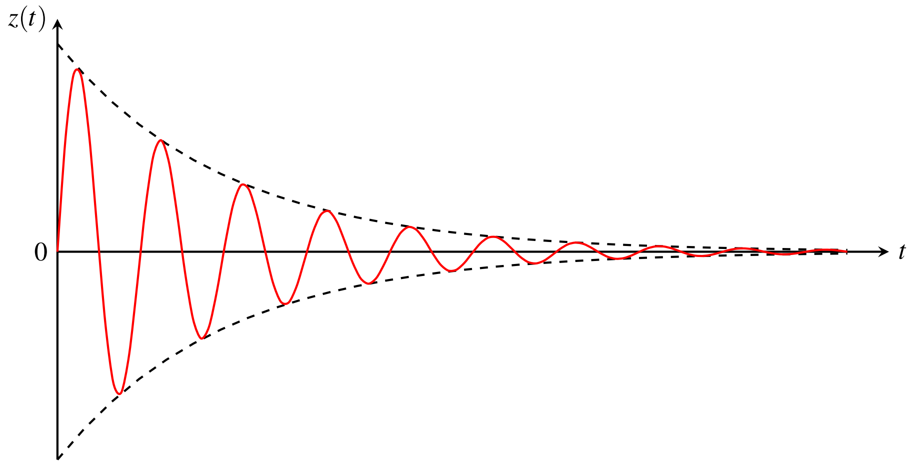
$$r = -\alpha \pm \mathrm{j}\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm \mathrm{j}\gamma$$

La solution générale de l'équation est $z(t) = (A\cos(\gamma t) + B\sin(\gamma t))\mathrm{e}^{-\alpha t}$. On détermine les constantes d'intégration A et B avec les deux conditions initiales :

$$\begin{cases} z(0) = A = 0 \\ \dot{z}(0) = -\gamma A + \gamma B = v_0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{v_0}{\gamma} \end{cases}$$

Finalement la solution s'écrit $\boxed{z(t) = \dfrac{v_0}{\gamma}\sin(\gamma t)\mathrm{e}^{-\alpha t}}$.

On trace l'allure de son graphe ci-dessous (sans information sur le facteur de qualité on choisit arbitrairement l'amortissement).



► Réaliser un bilan de puissance électromécanique

6. On reprend l'équation du mouvement obtenue à la question 4 et on la multiplie par $m\dot{z}$:

$$m\ddot{z}\dot{z} + \frac{B^2d^2}{R}\dot{z}^2 + 2k\dot{z}z = 0 \iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + kz^2\right) + \frac{B^2d^2}{R}\dot{z}^2 = 0$$

On conclut en utilisant le résultat de la question 2 :

$$\frac{B^2d^2}{R}\dot{z}^2 = \frac{B^2d^2}{R} \times \frac{R^2i^2}{B^2d^2} = Ri^2 \implies \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + kz\right) + Ri^2 = 0}$$

Cette équation traduit sous forme mathématique **le transfert d'énergie mécanique en énergie électrique** qui s'opère dans la tige, via l'action du champ magnétique. On peut l'écrire sous la forme :

$$\mathscr{P}_{\text{elec}} = -\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_m}{\mathrm{d}t}$$

avec $\mathscr{P}_{\text{elec}} = Ri^2 = ei$ la puissance électrique reçue par le circuit et $\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 + kz^2$ l'énergie mécanique de la tige. Toute diminution de l'énergie mécanique de la tige correspond à une égale quantité d'énergie électrique reçue par le circuit.

Remarque 1 : la conversion d'énergie mécanique en énergie électrique est totale (rendement de 100%). Cela s'explique par le fait que le champ magnétique qui est à l'origine de ce transfert **ne stocke pas d'énergie**. Cette propriété peut se résumer à une simple équation, qui relie la puissance des actions de Laplace $\mathscr{P}_{\text{lap}}$ qui s'exerce sur la tige à $\mathscr{P}_{\text{elec}}$.

$$\mathscr{P}_{\text{lap}} = \vec{F}_{\text{lap}} \cdot \vec{v} = -\frac{B^2d^2}{R}\dot{z}^2 = -Ri^2 = -ei \iff \boxed{\mathscr{P}_{\text{lap}} + ei = 0}$$

La double action du champ magnétique (effet mécanique sur la tige CD via les actions de Laplace et effet électrique par l'apparition d'une f.e.m. induite) se traduit par une puissance résultante **nulle**.

Remarque 2 : on a implicitement écrit que l'énergie potentielle de la tige s'écrit $\mathscr{E}_p = kz^2$. Précisons pourquoi on peut dire cela. La tige est soumise à trois forces conservatives : $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{P}$. À une constante près $\mathscr{E}_{p,0}$ arbitraire on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_p &= 2\times\frac{1}{2}k\left(\ell-\ell_0\right)^2 - mgz + \mathscr{E}_{p,0} \\
&= k\left(z+\frac{mg}{2k}\right)^2 - mgz + \mathscr{E}_{p,0} \\
&= kz^2 + \cancel{mgz} + \frac{m^2g^2}{4k} - \cancel{mgz} + \mathscr{E}_{p,0} \\
&= kz^2 + \frac{m^2g^2}{4k} + \mathscr{E}_{p,0}
\end{aligned}$$

En choisissant arbitrairement $\mathscr{E}_{p,0} = -\dfrac{m^2g^2}{4k}$ (autrement dit en choisissant l'origine de l'énergie potentielle totale en $z=0$), on obtient bien $\mathscr{E}_p = kz^2$.

► **Calculer une énergie reçue**

7. Méthode 1 : **bilan de puissance électromécanique**

On calcule l'énergie reçue en intégrant $\mathscr{P}_{\text{élec}}(t)$ entre $t=0$ et $t=+\infty$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_{\text{elec}} = \int_0^{+\infty}\mathscr{P}_{\text{elec}}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} Ri^2\mathrm{d}t \\
= -\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + kz\right)\mathrm{d}t \\
= -\left[\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + kz\right]_0^{+\infty}
\end{aligned}$$

D'après le résultat de la question 5 $z(t)$ et $\dot{z}(t)$ tendent vers zéro quand $t\to+\infty$. On peut conclure, connaissant les conditions initiales :

$$\boxed{\mathscr{E}_{\text{elec}} = \frac{1}{2}mv_0^2}$$

Le résultat était attendu. Entre $t=0$ et $t=+\infty$ l'énergie potentielle de la tige s'est conservée puisque $z(0)=z(\infty)=0$. En fin de compte c'est l'intégralité de l'énergie cinétique de la tige qui a été convertie en énergie électrique.

Méthode 2 : **Calcul direct**

On utilise le résultat de la question 5 pour exprimer $i(t)$:

$$\dot{z}(t) = \frac{v_0}{\gamma}\left(\gamma\cos(\gamma t) - \alpha\sin(\gamma t)\right)\mathrm{e}^{-\alpha t} \iff i(t) = -\frac{Bdv_0}{R}\left(\cos(\gamma t) - \frac{\alpha}{\gamma}\sin(\gamma t)\right)\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

L'énergie électrique reçue par le circuit s'écrit alors sous la forme :

$$\mathscr{E}_{\text{elec}} = \int_0^{+\infty} Ri^2\mathrm{d}t = \frac{B^2d^2v_0^2}{R}\int_0^{+\infty}\left(\cos(\gamma t) - \frac{\alpha}{\gamma}\sin(\gamma t)\right)^2\mathrm{e}^{-2\alpha t}\mathrm{d}t = \frac{B^2d^2v_0^2}{4R\alpha}$$

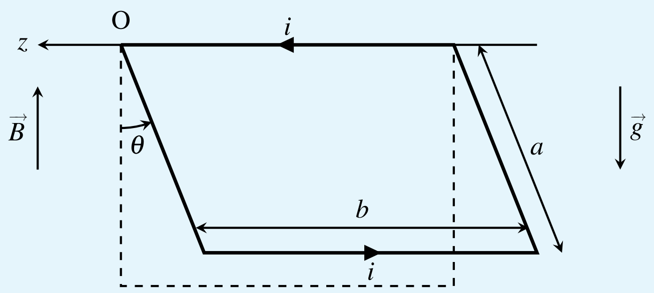
On conclut en remplaçant α par son expression :

$$\mathscr{E}_{\text{elec}} = \frac{B^2d^2v_0^2}{4R}\times\frac{2mR}{B^2d^2} \iff \boxed{\mathscr{E}_{\text{elec}} = \frac{1}{2}mv_0^2}$$

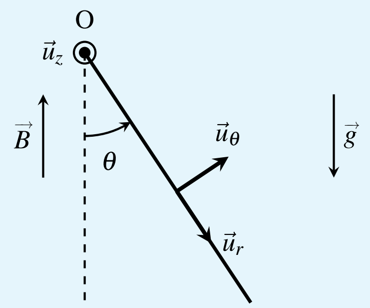
Application 1 : TD : exercices 1 + 3.

2 Induction dans un cadre en rotation

Situation : Un cadre métallique, de côtés a et b, de résistance R, d'inductance négligeable, de moment d'inertie J est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ vertical. Le cadre rigide peut tourner en pivot parfait autour d'un axe horizontal $(\mathrm{O}z)$. On notera $\phi_0 = Bab$.



vue en perspective



vue de face

1. Montrer qu'en cas de rotation du cadre il apparaît un courant induit i à exprimer en fonction de θ, $\dot{\theta}$, R et ϕ_0.

2. Établir l'équation du mouvement du cadre vérifiée par $\theta(t)$.

3. À l'instant initial $t = 0$ le cadre est lâché sans vitesse depuis la position angulaire θ_0. Déterminer $\displaystyle\int_0^{+\infty} Ri^2(t)\mathrm{d}t$.

► **Mettre en œuvre la loi de Faraday**

1. Compte tenu de l'orientation du circuit le vecteur surface du cadre est $\vec{S} = ab\vec{u}_\theta$. le flux magnétique à travers le cadre s'écrit $\phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = \phi_0 \sin\theta$. On détermine la f.e.m. d'induction à l'aide de la loi de Faraday :

$$e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\phi_0\dot{\theta}\cos\theta$$

Comme le cadre est purement résistif on détermine l'intensité avec la loi d'Ohm : $\boxed{i = \frac{e}{R} = -\frac{\phi_0}{R}\dot{\theta}\cos\theta}$.

► **Mettre en œuvre le TMC**

2. Le cadre est soumis à son poids $\vec{P}$ et au couple des actions de Laplace $\vec{\Gamma}_{\mathrm{lap}}$. Le poids s'applique au centre d'inertie du cadre et son moment par rapport à $(\mathrm{O}z)$ vaut :

$$\mathscr{M}_z(\vec{P}) = \left(\frac{a}{2}\vec{u}_r \wedge \vec{P}\right)\cdot\vec{u}_z = \left(\frac{a}{2}\vec{u}_r \wedge mg\left(\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta\right)\right)\cdot\vec{u}_z = -\frac{1}{2}mga\sin\theta$$

On détermine également l'expression du couple des actions de Laplace :

$$\vec{\Gamma}_{\mathrm{lap}} = \vec{\mathscr{M}} \wedge \vec{B} = iab\vec{u}_\theta \wedge B\left(-\cos\theta\vec{u}_r + \sin\theta\vec{u}_\theta\right) = i\phi_0\cos\theta\vec{u}_z = -\frac{\phi_0^2}{R}\dot{\theta}\cos^2\theta\vec{u}_z$$

On applique le théorème du moment cinétique au cadre, par rapport à l'axe $(\mathrm{O}z)$, dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_z(\vec{P}) + \vec{\Gamma}\cdot\vec{u}_z \iff \boxed{J\ddot{\theta} + \frac{\phi_0^2}{R}\dot{\theta}\cos^2\theta + \frac{1}{2}mga\sin\theta = 0}$$

► **Réaliser le bilan de puissance électromécanique du système**

3. On multiplie l'équation différentielle par $\dot{\theta}$:

$$J\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{\phi_0^2}{R}\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \frac{1}{2}mga\dot{\theta}\sin\theta = 0 \iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mga\cos\theta\right) + \frac{\phi_0^2}{R}\dot{\theta}^2\cos^2\theta = 0$$

En utilisant le résultat de la question 1 on peut écrire cette relation sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}mga\cos\theta\right)+Ri^2=0$$

Cette équation traduit le transfert d'énergie mécanique en énergie électrique dans le cadre, via l'action du champ magnétique. On utilise ce bilan pour déterminer l'énergie électrique reçue par le circuit. Dans la limite $t\to+\infty$ toute l'énergie mécanique du cadre a été convertie en énergie électrique consommée irréversiblement par la résistance, on peut donc prévoir que le cadre se trouve au repos dans sa position d'équilibre stable ($\theta(\infty)=0$ et $\dot{\theta}(\infty)=0$).

$$\int_0^{+\infty}Ri^2(t)\mathrm{d}t=-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}(t)^2-\frac{1}{2}mga\cos\theta(t)\right)\mathrm{d}t=-\left[\frac{1}{2}J\dot{\theta}(t)^2-\frac{1}{2}mga\cos\theta(t)\right]_0^{+\infty}$$

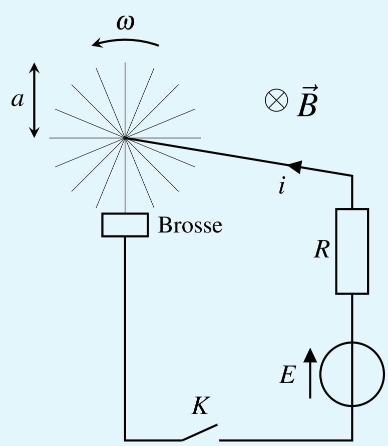
On conclut compte tenu des conditions initiales et du comportement limite du cadre :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}Ri^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}mga\left(1-\cos\theta_0\right)}$$

Application 2 : TD : exercice 5.

3 Moteur électrique rotatif

Situation : On considère le circuit ci-contre : une roue, dont les rayons sont en métal, de longueur a, tourne de façon à ce qu'à tout instant un unique rayon soit en contact avec la brosse. Le moment d'inertie de la roue est J. La roue entraîne une charge mécanique (non représentée sur le schéma) et subit de sa part un couple résistant constant $-\Gamma_r$ (avec $\Gamma_r>0$). Le circuit est fermé par un contact électrique au centre de la roue. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire. On ferme l'interrupteur K à $t=0$.
Par la suite on notera $\Gamma_m=\dfrac{a^2BE}{2R}$ avec $B=\|\vec{B}\|$.



1. On considère l'unique rayon en contact avec la brosse. En utilisant la relation $\mathscr{P}_{\text{lap}}+ei=0$ où $\mathscr{P}_{\text{lap}}$ est la puissance des actions de Laplace, déterminer la f.e.m. d'induction qui apparaît dans ce rayon, en fonction de a, B et la vitesse angulaire ω de la roue.

2. Déterminer les équations couplées, dites “électrique” et “mécanique”, vérifiées par $i(t)$ et $\omega(t)$.

3. On suppose que la roue est immobile avant la fermeture de K. Déterminer $i(0^+)$.
La roue peut entrer en rotation à partir de $t=0$ à condition que le moment des actions de Laplace soit supérieur, en valeur absolue, au couple résistant Γ_r. Quelle condition doit vérifier Γ_m pour que cela soit le cas ?

4. La condition précédente étant vérifiée déterminer $\omega(t)$ à tout instant $t>0$. Identifier un temps caractéristique τ puis donner l'expression de la vitesse angulaire Ω et de l'intensité I en régime permanent.

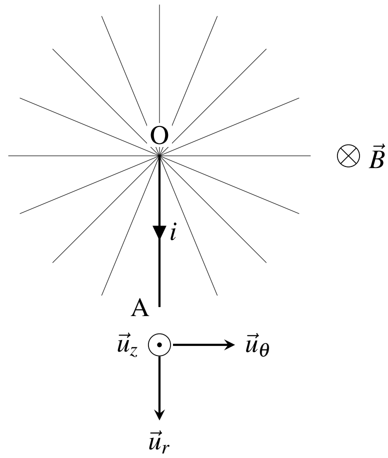
5. AN : $a=30\,\text{cm}$, $B=1{,}0\,\text{T}$, $E=15\,\text{V}$, $R=2\,\Omega$ et $\Gamma_m=5\Gamma_r$. Calculer Ω (en tours par minute), I puis la puissance reçue par la roue en régime permanent.

À retenir : on a l'habitude de calculer des f.e.m. d'induction à l'aide de la loi de Laplace. Pourtant celle-ci est parfois mise en défaut, notamment dans certains cas où le circuit électrique présente des **contacts frottants**, comme c'est le cas ici au niveau de la liaison entre la roue et la brosse. On peut néanmoins accéder à la f.e.m. d'induction en utilisant le bilan de puissance magnétique $\mathscr{P}_{\text{lap}}+ei=0$. On va démontrer que la puissance des actions de Laplace qui s'exercent sur le rayon est proportionnelle à l'intensité i ; on en déduira la f.e.m. d'induction par identification.

► Schématiser la situation

1. On introduit la base d'étude cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. On note O le centre de la roue et A son extrémité en contact avec la brosse (voir figure ci-dessous).

► Calculer une f.e.m. d'induction grâce aux actions de Laplace



On calcule la force de Laplace sur le rayon OA :

$$\vec{F}_{\text{lap}} = i\overrightarrow{\text{OA}} \wedge \vec{B} = ia\vec{u}_r \wedge (-B\vec{u}_z) = iaB\vec{u}_\theta$$

On détermine ensuite le moment résultant des actions de Laplace par rapport à l'axe de rotation $(\text{O}z)$ (on rappelle que pour une portion rectiligne de circuit plongée dans un champ magnétique uniforme la force de Laplace s'applique au centre du segment) :

$$\mathscr{M}_{\text{lap}} = \left(\frac{a}{2}\vec{u}_r \wedge \vec{F}_{\text{lap}}\right) \cdot \vec{u}_z = \frac{1}{2}ia^2B$$

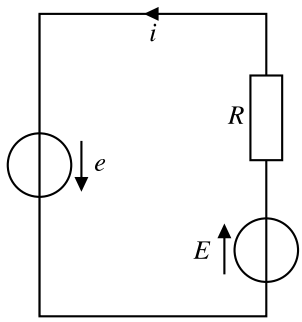
On en déduit l'expression de la puissance des actions de Laplace :

$$\mathscr{P}_{\text{lap}} = \mathscr{M}_{\text{lap}}\omega = \frac{1}{2}ia^2B\omega$$

La puissance des actions de Laplace est proportionnelle à l'intensité i. On en déduit par identification la f.e.m. d'induction (en convention générateur) :

$$\boxed{e = -\frac{1}{2}a^2B\omega}$$

► Déterminer l'équation électrique du système



2. On représente ci-contre le schéma électrique équivalent du circuit. On établit l'équation électrique (E) en appliquant la loi des mailles :

$$E + e = Ri \iff \boxed{E = Ri + \frac{1}{2}a^2B\omega}$$

► Déterminer l'équation mécanique du système

La roue est soumise à son poids $\vec{P}$, à la réaction de l'axe de rotation $(\text{O}z)$, à la force de Laplace $\vec{F}_{\text{lap}}$ et au couple résistant $-\Gamma_r$. On applique le théorème du moment cinétique à la roue, par rapport à $(\text{O}z)$, dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_z(\vec{P}) + \mathscr{M}_z(\vec{R}) + \mathscr{M}_{\text{lap}} - \Gamma_r$$

La réaction s'applique en O. On suppose que la roue est équilibrée, c'est-à-dire que son centre d'inertie est située exactement en O. Alors le bras de levier de $\vec{P}$ et $\vec{R}$ est nul donc $\mathscr{M}_z(\vec{P}) = \mathscr{M}_z(\vec{R}) = 0$. L'équation mécanique (M) s'écrit alors sous la forme :

$$\boxed{J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}ia^2B - \Gamma_r}$$

► Déterminer la condition de démarrage d'un moteur rotatif

3. D'après l'équation (E) le courant, après fermeture de l'interrupteur, vaut $\boxed{i(0^+) = \frac{E}{R}}$.

Le moment des actions de Laplace vaut alors $\mathscr{M}_{\text{lap}} = \frac{a^2BE}{2R} = \Gamma_m$. La roue peut entrer en rotation à condition que $\boxed{\Gamma_m > \Gamma_r}$.

► Établir l'équation du mouvement de la roue

4. On isole i dans (E) et on réinjecte dans (M), ce qui permet d'obtenir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse angulaire :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \frac{a^4B^2}{4JR}\omega = \frac{\Gamma_m - \Gamma_r}{J}}$$

► Résoudre une équation différentielle du premier ordre

On a affaire à une équation différentielle caractéristique des phénomènes transitoires du premier ordre. La forme canonique de cette équation est du type :

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \frac{\omega}{\tau} = \frac{\Omega}{\tau}$$

avec τ le temps caractéristique du régime transitoire et Ω est la valeur prise par $\omega(t)$ en régime permanent. On les identifie dans le cas présent :

$$\boxed{\tau = \frac{4JR}{a^4B^2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\Omega = \frac{4R}{a^4B^2}(\Gamma_m - \Gamma_r)}$$

La solution générale de l'équation est du type $\omega(t) = \Omega + A\mathrm{e}^{-t/\tau}$. Avec la condition initiale $\omega(0) = 0$ on montre que :

$$\boxed{\omega(t) = \Omega\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$$

On utilise l'équation (E) pour obtenir l'intensité en régime permanent :

$$\boxed{I = \frac{E}{R} - \frac{a^2B\Omega}{2R} = \frac{2\Gamma_r}{a^2B}}$$

5. Les applications numériques donnent :

$$\boxed{\Omega = 2{,}5\cdot 10^3\,\text{tours/min}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{I = 1{,}5\,\mathrm{A}}$$

La puissance reçue par la roue en régime permanent vaut :

$$\boxed{\mathscr{P}_{\text{lap}} = \frac{1}{2}Ia^2B\Omega = 18\,\mathrm{W}}$$

Application 3 : TD : exercice 4.