Chapitre 22

PRODUIT SCALAIRE

I Produit scalaire

1 Définition

Définition 1 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un* **produit scalaire sur** *E est une application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

(i) φ est symétrique :

$$\forall\, x, y \in E, \varphi(y, x) = \varphi(x, y).$$

(ii) φ est bilinéaire, c'est-à-dire linéaire par rapport à chacune de ses variables :

$$\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall\, x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in E, \begin{cases} \varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 \varphi(x_1, y) + \alpha_2 \varphi(x_2, y) \\ \varphi(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 \varphi(x, y_1) + \alpha_2 \varphi(x, y_2) \end{cases}.$$

(iii) φ est définie positive :

$$\forall\, x \in E, \varphi(x, x) \geqslant 0.$$

$$\forall\, x \in E, (\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0).$$

Un **espace préhilbertien réel** *est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Un* **espace euclidien** *est un espace préhilbertien réel de dimension finie.*

Le produit scalaire de x et y sera généralement noté $\langle x, y\rangle$ ou $(x|y)$ ou encore $x \cdot y$.

Remarques :

1) Par bilinéarité, on a $\langle 0, x\rangle = \langle x, 0\rangle = 0$ pour tout $x \in E$.

2) Si on a montré la symétrie, il suffit de montrer la linéarité à gauche ou à droite.

2 Exemples

1) Soit $E = \mathbb{R}^n$. L'application $\langle ., .\rangle$ définie sur E^2 par

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, est un produit scalaire appelé **produit scalaire canonique** sur $\mathbb{R}^n$.
En effet :

(i) $\langle ., .\rangle$ est symétrique : pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a $\langle y, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} y_k x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \langle x, y\rangle$.

(ii) $\langle ., .\rangle$ est linéaire à gauche : pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a

$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \sum_{k=1}^{n} (\alpha x_k + \beta y_k) z_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} x_k z_k + \beta \sum_{k=1}^{n} y_k z_k = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle.$$

Comme elle est symétrique, elle est également linéaire à droite.

(iii) $\langle ., .\rangle$ est définie positive : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $\langle x, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geqslant 0$, et si $\langle x, x\rangle = 0$ alors tous les x_k sont nuls (une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls), donc $x = 0$.

2) Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. L'application $\langle ., .\rangle$ définie sur E^2 par

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$$

est un produit scalaire. En effet :

(i) $\langle .,. \rangle$ est symétrique : pour tous $f, g \in E$ on a $\langle g, f \rangle = \displaystyle\int_a^b g(x)f(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \langle f, g \rangle$.

(ii) $\langle .,. \rangle$ est linéaire à gauche : pour tous $f, g, h \in E$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a

$$\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)h(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)h(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)h(x)\,dx = \alpha\langle f, h \rangle + \beta\langle g, h \rangle.$$

Comme elle est symétrique, elle est également linéaire à droite.

(iii) $\langle .,. \rangle$ est définie positive : pour tout $f \in E$ on a $\langle f, f \rangle = \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,dx \geqslant 0$, et si $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$ alors, puisque f^2 est continue et positive sur $[a, b]$, f^2 est nulle (proposition 12 du chapitre 15) et donc f aussi.

3 Norme

Définition 2 *Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit $x \in E$. La* **norme de** *x est le réel défini par*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

L'application $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ est la **norme euclidienne** *associée au produit scalaire $\langle .,. \rangle$.*

Par exemple, la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est donnée par

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

Proposition 1 *Pour tout $x \in E$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:*

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \times \|x\|$.

Démonstration :

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ car le produit scalaire est défini positif.

(ii) $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \times \|x\|$ par bilinéarité du produit scalaire. □

Proposition 2 *Pour tous $x, y \in E$:*

(i) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$.

(ii) $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$.

(iii) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$ *(identité du parallélogramme).*

(iv) $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\langle x, y \rangle$ *(identité de polarisation).*

Démonstration :

(i) $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$.

(ii) $\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$.

(iii) s'obtient en additionnant (i) et (ii), (iv) s'obtient en les soustrayant. □

Proposition 3 *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Pour tous $x, y \in E$:*

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \times \|y\|$$

avec égalité si et seulement si la famille (x, y) est liée.

Démonstration :

Si $x = 0$ c'est immédiat. Supposons $x \neq 0$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\|\lambda x + y\|^2 = \lambda^2\,\|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \geqslant 0$. C'est un polynôme réel du second degré en λ à valeurs positives : son discriminant $\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2$ est donc négatif, d'où $\langle x, y \rangle^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2$, soit $|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \times \|y\|$.

S'il y a égalité, alors $\Delta = 0$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\|\lambda x + y\| = 0$, d'où $\lambda x + y = 0$ et la famille est liée. Réciproquement, si (x, y) est liée, alors, puisque $x \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$ et $|\langle x, y \rangle| = |\lambda| \times \|x\|^2 = \|x\| \times \|y\|$. □

Pour les produits scalaires du paragraphe 2, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

1) Pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.$$

2) Pour tous $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} \times \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}.$$

Proposition 4 *(Inégalité de Minkowski - Inégalité triangulaire) Pour tous $x, y \in E$:*

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$ ou s'il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $y = \lambda x$.

Démonstration :

D'après les propositions précédentes, on a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$.

On a égalité si et seulement si $\langle x, y\rangle \geqslant 0$ et que $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$. Alors la famille (x, y) est liée donc $x = 0$ ou il existe λ tel que $y = \lambda x$, et alors $\langle x, y\rangle = \lambda\|x\|^2 \geqslant 0$ donc $\lambda \geqslant 0$. La réciproque est immédiate. □

Remarque : On a aussi $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x + y\|$ pour tous $x, y \in E$ (il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire à $\|x\| = \|x + y - y\|$).

II Orthogonalité

Dans tout le paragraphe, $(E, \langle ., .\rangle)$ est un espace préhilbertien réel.

1 Vecteurs orthogonaux

Définition 3 *Deux vecteurs $x, y \in E$ sont* **orthogonaux** *si leur produit scalaire est nul. On note alors $x \perp y$.*

Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, les vecteurs $x = (1, 2, 3)$ et $y = (-4, -1, 2)$ sont orthogonaux car $\langle x, y\rangle = -4 - 2 + 6 = 0$.

Remarque : Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de E.

Proposition 5 *(Théorème de Pythagore) x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

Démonstration : Conséquence immédiate de la relation $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$. □

2 Familles orthogonales, orthonormales

Définition 4 *Une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs de E est* **orthogonale** *si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux, i.e. si $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ avec $i \neq j$.*

Elle est **orthonormale** *ou* **orthonormée** *si, de plus, on a $\|u_i\| = 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Proposition 6

(i) (Théorème de Pythagore) Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est orthogonale, alors $\|u_1 + \ldots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \ldots + \|u_n\|^2$.

(ii) Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Démonstration :

(i) Récurrence immédiate.

(ii) Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$. Alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $0 = \langle u_i, \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n\rangle = \lambda_1\langle u_i, u_1\rangle + \ldots + \lambda_i\langle u_i, u_i\rangle + \ldots + \lambda_n\langle u_i, u_n\rangle = \lambda_i\|u_i\|^2$. Or $\|u_i\| \neq 0$, donc $\lambda_i = 0$. □

Si E est de dimension finie n, une famille orthonormale de n vecteurs de E est donc une base de E. On dit que c'est une **base orthonormale** de E. Par exemple, la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale pour le produit scalaire canonique.

L'intérêt des bases orthonormales est que les expressions du produit scalaire et de la norme dans une telle base y sont très simples :

Proposition 7 *Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. Soient $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ et $y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n$ deux vecteurs de E. Alors :*

(i) Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $x_k = \langle x, e_k \rangle$, et par conséquent $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$.

(ii) Le produit scalaire de x et y est $\langle x, y \rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

(iii) La norme de x est $\|x\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$.

Démonstration :

Le (i) est immédiat : $\langle x, e_k \rangle = \left\langle \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, e_k \right\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \langle e_i, e_k \rangle = x_k$ car $\langle e_i, e_k \rangle = 1$ si $i = k$ et 0 sinon.

De même, pour le (ii), on a $\langle x, y \rangle = \left\langle \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$. Le (iii) s'en déduit. □

Remarque : Soient X et Y les matrices respectives de x et y dans la base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$. Alors, en identifiant une matrice de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ à un réel, on voit que :

$$\langle x, y \rangle = X^T Y$$

$$\|x\|^2 = X^T X.$$

3 Procédé d'orthonormalisation de Schmidt

Proposition 8 *Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E. Il existe une famille orthonormale $(f_1, \ldots, f_n)$ de E telle que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$.*

Démonstration :

On raisonne par récurrence sur n.

Si (e_1) est libre, i.e. si $e_1 \neq 0$, on pose $f_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$. Alors $\|f_1\| = 1$ et $\mathrm{Vect}(f_1) = \mathrm{Vect}(e_1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons le théorème vrai au rang n et considérons une famille libre $(e_1, \ldots, e_{n+1})$. Par hypothèse de récurrence, on peut orthonormaliser $(e_1, \ldots, e_n)$ en $(f_1, \ldots, f_n)$. Il reste à construire f_{n+1}.

Posons $g_{n+1} = e_{n+1} + \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n$.

Alors $g_{n+1} \neq 0$ sinon on aurait $e_{n+1} \in \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ donc $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ serait liée. De plus, pour tout $i \leqslant n$:

$$\begin{aligned} f_i \perp g_{n+1} &\Leftrightarrow \langle f_i, g_{n+1} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle e_{n+1}, f_i \rangle + \alpha_1 \langle f_i, f_1 \rangle + \ldots + \alpha_i \langle f_i, f_i \rangle + \ldots + \alpha_n \langle f_i, f_n \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle e_{n+1}, f_i \rangle + \alpha_i = 0 \text{ (car la famille } (f_1, \ldots, f_n) \text{ est orthonormale)} \\ &\Leftrightarrow \alpha_i = -\langle e_{n+1}, f_i \rangle. \end{aligned}$$

On pose donc $g_{n+1} = e_{n+1} - \langle e_{n+1}, f_1 \rangle f_1 - \ldots - \langle e_{n+1}, f_n \rangle f_n$ et $f_{n+1} = \dfrac{g_{n+1}}{\|g_{n+1}\|}$. Alors la famille $(f_1, \ldots, f_n, f_{n+1})$ est orthonormale.

De plus, on a immédiatement par double inclusion $\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$. C'est ce qu'on voulait. □

En pratique, pour appliquer la méthode de Schmidt, on pourra soit procéder comme dans la démonstration, soit appliquer directement les formules donnant les f_k :

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$$

$$\forall\, k \in \{1, \ldots, n-1\}, f_{k+1} = \frac{e_{k+1} - \langle e_{k+1}, f_1 \rangle f_1 - \ldots - \langle e_{k+1}, f_k \rangle f_k}{\|e_{k+1} - \langle e_{k+1}, f_1 \rangle f_1 - \ldots - \langle e_{k+1}, f_k \rangle f_k\|}$$

Corollaire 9

(i) Tout espace euclidien possède une base orthonormale.

(ii) (Théorème de la base orthonormale incomplète) Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

Démonstration :

Pour le (i) il suffit de prendre une base de E et de l'orthonormaliser. Pour le (ii) il suffit de compléter la famille en une base de E et d'appliquer la méthode de Schmidt à partir du premier vecteur qu'on a ajouté. □

Exercice 1 Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on pose $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(x)Q(x)\,dx$.

1) Montrer que l'application $\langle ., . \rangle : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

2) Appliquer la méthode de Schmidt à la famille $(1, X, X^2)$.

4 Orthogonal d'un sous-espace

Définition 5 *Soit X une partie de E.* **L'orthogonal de** X *est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de X. On le note $X^\perp$.*

Ainsi :

$$y \in X^\perp \Leftrightarrow \forall\, x \in X, \langle x, y\rangle = 0.$$

Proposition 10 *Soit X une partie de E. Alors $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration :
Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur de E, donc à tout vecteur de X. Par conséquent $0 \in X^\perp$.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $y, z \in X^\perp$. Alors pour tout $x \in X$, $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle x, z\rangle = 0$, donc $\alpha y + \beta z \in X^\perp$. $\square$

Proposition 11 *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors :*

(i) F et $F^\perp$ sont en somme directe.

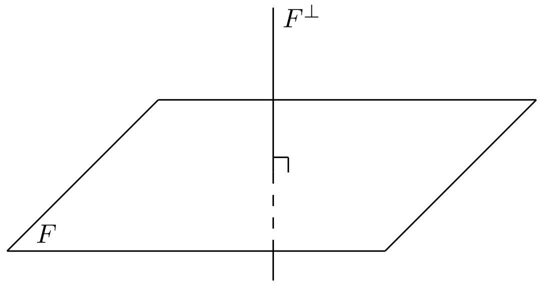
(ii) Si F est de dimension finie, alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires.

(iii) On a toujours $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$, et si F est de dimension finie, alors $F = \left(F^\perp\right)^\perp$.

Si F est de dimension finie, on dit que $F^\perp$ est le **supplémentaire orthogonal** de F. Si E est euclidien, alors

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E.$$

En particulier, si F est un hyperplan de E, alors $F^\perp$ est une droite vectorielle (tout vecteur engendrant cette droite est un **vecteur normal** à F).



Démonstration :
(i) Soit $x \in F \cap F^\perp$. Alors $\langle x, x\rangle = 0$, donc $\|x\| = 0$, d'où $x = 0$.

(ii) Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormale de F. Soit $x \in E$. Montrons par analyse-synthèse qu'on peut décomposer x de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de $F^\perp$.

Analyse : supposons qu'il existe $y \in F$ et $z \in F^\perp$ tels que $x = y + z$. D'après la proposition 7, on a $y = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \langle y, e_k\rangle e_k$. Or, pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, $z = x - y$ est orthogonal à e_k, donc $\langle y - x, e_k\rangle = 0$, d'où $\langle y, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle$. On a donc $y = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k\rangle e_k$ et $z = x - y$.

Synthèse : soient y et z comme ci-dessus. Alors $x = y + z$ et $y \in F$, et pour tout k on a $\langle z, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle - \langle y, e_k\rangle = 0$ donc $z \in F^\perp$.

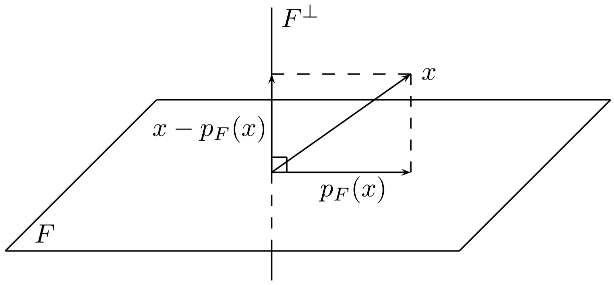
(iii) Soit $x \in F$. Alors pour tout $y \in F^\perp$ on a $\langle x, y\rangle = 0$, donc $x \in \left(F^\perp\right)^\perp$.

Supposons maintenant que F est de dimension finie. Soit $x \in \left(F^\perp\right)^\perp$. On vient de voir que $E = F \oplus F^\perp$, donc il existe $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^\perp$ tels que $x = x_1 + x_2$. Alors $\|x_2\|^2 = \langle x_2, x_2\rangle = \langle x, x_2\rangle - \langle x_1, x_2\rangle = 0 - 0 = 0$, donc $x_2 = 0$ et donc $x \in F$. $\square$

5 Projection orthogonale

Définition 6 *Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. La* **projection orthogonale sur** F *est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.*

Elle est bien définie car F et $F^\perp$ sont supplémentaires.



Proposition 12 *Soit* $(e_1, \ldots, e_p)$ *une base orthonormale de* F*. Soit* $x \in E$*. Alors :*

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Démonstration : $p_F(x) = y$ dans la démonstration du (ii) de la proposition 11. $\square$

En pratique, pour calculer $p_F(x)$ on pourra soit appliquer directement cette formule, soit déterminer ses coordonnées dans une base de F en écrivant que $x - p_F(x)$ est orthogonal à chacun des vecteurs de cette base.

Proposition 13 *(Inégalité de Bessel) Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E *de dimension finie et soit* p_F *la projection orthogonale sur* F*. Alors pour tout* $x \in E$*,* $\|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$*.*

Démonstration : D'après le théorème de Pythagore, $\|x\|^2 = \|x - p_F(x) + x\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2 \geqslant \|p_F(x)\|^2$. $\square$

Définition 7 *Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E *de dimension finie. Soit* $x \in E$*. La* **distance de** x **à** F *est le réel :*

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

Cette borne inférieure existe car l'ensemble $\{\|x - y\| \mid y \in F\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée (par 0).

Proposition 14 *Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E *de dimension finie. Soit* p_F *la projection orthogonale sur* F*. Soit* $x \in E$*. Alors :*

(i) $p_F(x)$ *est l'unique vecteur* $y_0 \in F$ *tel que* $\|x - y_0\| = \inf_{y \in F} \|x - y\|$*.*

(ii) $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$*.*

La borne inférieure de la définition précédente est donc un minimum et elle est atteinte en $y = p_F(x)$.

Démonstration :

Soit $y \in F$. D'après le théorème de Pythagore, $\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 \geqslant \|x - p_F(x)\|^2$, avec égalité si et seulement si $\|p_F(x) - y\|^2 = 0$, i.e. si et seulement si $y = p_F(x)$. $\square$

Exercice 2 On reprend le produit scalaire de $\mathbb{R}[X]$ de l'exercice 1. Calculer le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ puis la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.