# Fiche d'exercices : Séries

**Exercice 1** Étudier la convergence de la série de terme général :

1. $\dfrac{n+1}{n^2+n+1}$
2. $\dfrac{n^2}{2^n+n}$
3. $\dfrac{1}{\ln n}$
4. $\dfrac{(-1)^n}{\ln n}$
5. $\operatorname{ch}\dfrac{1}{n}-\cos\dfrac{1}{n}$
6. $\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3}$
7. $n^{\frac{1}{n}}-1$
8. $\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$
9. $\dfrac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$
10. $\dbinom{2n}{n}^{-1}$
11. $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$
12. $\ln\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\ln\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$
13. $\dfrac{n^n}{n!a^n}$ avec $a>0$
14. $\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$
15. $\dfrac{n^n}{(2n)!}$
16. $\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$
17. $\dfrac{1}{\sqrt{n}+n^{2(-1)^n}}$
18. $\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^{-\sqrt{n}}$
19. $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-e.$
20. $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
21. $\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}$
22. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{\ln k}{k}$
23. $\dbinom{2n}{n}a^n$ avec $a>0$
24. $\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n}$
25. $\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^n-1$
26. $\dfrac{(\ln n)^n}{n!}$
27. $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n}}$
28. $\operatorname{Arccos}\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n+3}$

**Exercice 2** Étudier la convergence et calculer la somme de la série de terme général :

1. $\dfrac{1}{n(n+1)}$
2. $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$
3. $\ln\left(\dfrac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$
4. $\dfrac{n}{2^n}$
5. $\dfrac{1}{n2^n}$
6. $\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$
7. $\dfrac{n}{n^4+n^2+1}$
8. $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$
9. $\dfrac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$

**Exercice 3** Étudier la convergence de la série $\sum u_n$ où $u_n=\dfrac{1}{n}$ si $n$ est un carré et $\dfrac{1}{n^2}$ sinon.

**Exercice 4** Étudier la convergence de la série $\sum\left(\sqrt{n}+a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}\right)$, où $a,b\in\mathbb{R}$, et calculer sa somme lorsqu'elle converge.

**Exercice 5** Montrer que la série $\sum\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{n^2+n+1}$ converge et calculer sa somme. On pourra montrer que : $\forall x>0$, $\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x^2+x+1}=\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x}-\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x+1}$.

**Exercice 6** Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et calculer sa somme en utilisant le fait que $\displaystyle\frac{1}{k+1}=\int_0^1 t^k\,dt$.

**Exercice 7** *(Séries de Bertrand)* Étudier, en fonction des réels $\alpha$ et $\beta$, la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant2}\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$.

**Exercice 8** À l'aide des séries, montrer que la suite de terme général $1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\ln n$ est convergente.

**Exercice 9** Montrer que la suite de terme général $\dfrac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$ a une limite finie non nulle. On pourra considérer la série de terme général $\ln u_{n+1}-\ln u_n$.

**Exercice 10** Donner un équivalent lorsque $n$ tend vers $+\infty$ de :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^a}\ (0<a<1)\ ;\ \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^a}\ (a>1)\ ;\ \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}\ ;\ \ln n!$$

**Exercice 11** Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on pose $u_n=\dfrac{r(n)}{n(n+1)}$ où $r(n)$ est le reste dans la division euclidienne de $n$ par 5.

1) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}u_n$ converge.

2) Soit $\displaystyle H(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Exprimer $\displaystyle S_{5n}=\sum_{k=1}^{5n}u_k$ en fonction de $H(n+1)$ et $H(5n+5)$.

3) En déduire la somme de la série en utilisant le fait que $H(n)=\ln n+\gamma+o(1)$ au voisinage de $+\infty$.

**Exercice 12** Étudier la convergence et la convergence absolue des séries suivantes :

$$\sum_{n\geqslant1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\ ;\ \sum_{n\geqslant1}\frac{(-1)^n\ln n}{n-\ln n}\ ;\ \sum\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)\ ;\ \sum_{n\geqslant2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^a+(-1)^n}}\ (a>0).$$

**Exercice 13** *(Règle de Cauchy)* Soit $(u_n)$ une suite de réels positifs telle que $\sqrt[n]{u_n}\to\ell$ où $\ell\in\overline{\mathbb{R}}^+$. Montrer que si $\ell>1$, alors la série $\sum u_n$ diverge, que si $\ell<1$, alors la série converge, et que si $\ell=1$ on ne peut pas conclure.

**Exercice 14** *(Règle de Raabe-Duhamel)* Soit $(u_n)$ une suite de réels strictement positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1-\dfrac{\alpha}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ lorsque $n\to+\infty$.

1) Montrer que si $\alpha<1$, alors la série $\sum u_n$ diverge, et que si $\alpha>1$, alors la série converge. On pourra comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ où $v_n=\dfrac{1}{n^\beta}$.

2) Montrer que si $\alpha=1$ on ne peut pas conclure. On pourra considérer des séries de Bertrand.