Fiche d'exercices : Fonctions de deux variables

Exercice 1 Montrer qu'une boule ouverte de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

1) Montrer que l'union de deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que l'intersection de deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 Dans chacun des cas suivants, déterminer le plus grand ouvert sur lequel la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles :

1) $f(x,y) = x^2y + 3x - 2y + 1$.

2) $f(x,y) = \sin(xy)$.

3) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

4) $f(x,y) = \ln \dfrac{x}{y}$.

5) $f(x,y) = \operatorname{Arctan}(x^2+y^2)$.

6) $f(x,y) = \operatorname{Arcsin}(x^2+y^2)$.

Exercice 4 Étudier l'existence des dérivées partielles de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = |x| + |y|$.

Exercice 5 Étudier l'existence des dérivées partielles de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \max(x,y)$.

Exercice 6 On considère la fonction définie par $f(x,y) = \ln(x+y) - \ln(x-y)$.

1) Déterminer l'ensemble de définition U de f.

2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et calculer ses dérivées partielles.

3) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 1 en $(1,0)$ et l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$ au point correspondant.

Exercice 7 Déterminer l'équation du plan tangent en $(1,2)$ à la surface d'équation $z = x^2y$.

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = f(\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 9 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et soit g la fonction définie sur $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ par $g(s,t) = f\left(st, \dfrac{s}{t}\right)$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.

Exercice 10 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On définit la fonction F sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ par $F(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.

1) Calculer $\dfrac{\partial F}{\partial \rho}(\rho,\theta)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}(\rho,\theta)$.

2) En déduire l'expression de ∇f en fonction de $\dfrac{\partial F}{\partial \rho}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}$ dans la base polaire $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$.

Exercice 11 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1) Calculer les dérivées partielles de la fonction $g : (x,y) \mapsto f(y,x)$.

2) Calculer la dérivée de la fonction $h : x \mapsto f(x,x)$.

Exercice 12 Déterminer les extrema locaux et globaux de la fonction f définie par $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + x + y$.

Exercice 13 Déterminer les extrema locaux et globaux de la fonction f définie par $f(x,y) = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$.