TD31 : Introduction au monde quantique

Exercice 1 : Photons hertziens

1. Un émetteur radio émet un signal de fréquence $f = 105,5\,\text{MHz}$ et de puissance $\mathscr{P} = 100\,\text{kW}$. Evaluer le nombre de photons qu'il émet par seconde.
2. Une étoile de première grandeur émet un flux lumineux sur la terre de $1,6.10^{-10}\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ à une longueur d'onde moyenne de 556 nm. Combien de photons traversent la pupille de l'oeil par seconde ?

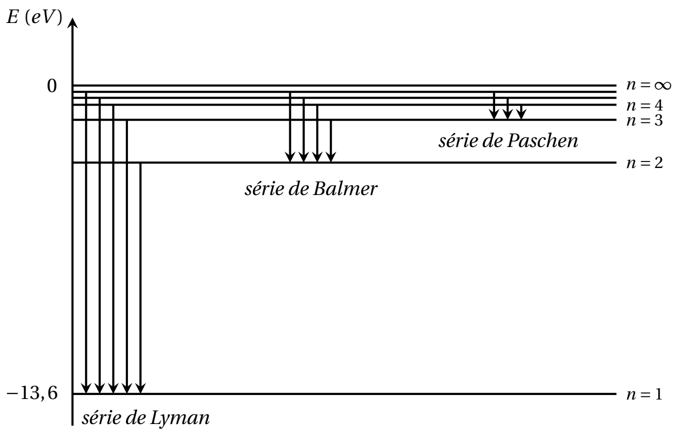
Exercice 2 : Longueur d'onde de de Broglie

1. Donner un ordre de grandeur raisonnable de la quantité de mouvement d'une personne qui marche, puis de sa longueur d'onde de de Broglie. Conclure.
2. Même question pour une molécule de dioxygène en mouvement dans un récipient. On pourra admettre que sa vitesse d'agitation thermique est de l'orde de $500\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ à température ambiante.

⋆ Exercice 3 : Niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène

L'électron de valence de l'atome d'hydrogène a des niveaux d'énergie qui ont été établi dans un premier temps de manière empirique, à partir du spectre d'émission de l'atome d'hydrogène. Ces niveaux d'énergie sont de la forme :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (\text{avec } E_n \text{en eV})$$



1. On appelle série de Lyman l'ensemble des radiations du spectre de l'hydrogène correspondant à une transition *vers le niveau fondamental* depuis un niveau d'énergie supérieur (de $n = 2$ jusqu'à $n = \infty$). Calculer la plus petite et la plus grande longueur d'onde associées aux transitions dans cette série. A quelle domaine du spectre électromagnétique appartiennent-elles ?
2. Même question pour la série de Balmer (transitions vers le premier niveau excité $n = 2$) et la série de Paschen (transition vers le niveau $n = 3$).
3. Le spectre contient 4 radiations dans le visible. Calculer les longueurs d'onde associées.

⋆ Exercice 4 : Effet photoélectrique

On envoie sur une photocathode en potassium une radiation ultraviolette (raie du mercure) $\lambda = 253,7\,\text{nm}$; on constate que l'énergie maximale des photoélectrons éjectés est $3,14\,\text{eV}$. Si c'est une raie visible $\lambda = 589\,\text{nm}$ (raie jaune du sodium) ; l'énergie maximale est alors $0,36\,\text{eV}$.

A l'aide de ces données, déterminer la constante de Planck, la valeur du travail d'extraction W des électrons de potassium et la longueur d'onde maximale des radiations pouvant produire un effet photoélectrique sur le potassium.

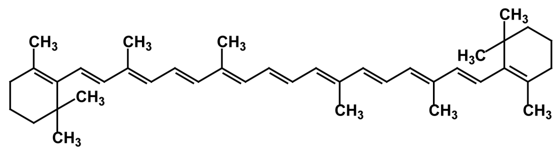
⋆ Exercice 5 : Interférences de matière

On cherche à réaliser l'expérience des fentes d'Young avec des atomes de néon. Pour cela, un gaz composé d'atomes de néon est porté à une température $T = 1\,\text{mK}$. On admet que l'énergie cinétique d'agitation thermique des constituants d'un gaz est donné par la relation $E_c = \frac{3}{2} k_B T$ où $k_B = 1,38.10^{-23}\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$ est appelée constante de Boltzmann.

1. La masse molaire du néon vaut $M = 20,2\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$. Calculer la masse m d'un atome de néon.
2. Exprimer la longueur d'onde thermique de de Broglie associée à ces atomes de néon en fonction de k_B, T et m.
3. Effectuer l'application numérique et conclure sur la possibilité de réaliser l'expérience des fentes d'Young avec un tel gaz. Cela serait-il possible à température ambiante ?

⋆ Exercice 6 : Électrons confinés

Dans la molécule de β-carotène, de formule ci-dessous, chaque double liaison met en jeu deux électrons qui ne restent pas au voisinage des atomes de la liaison mais peuvent se délocaliser sur l'ensemble de la chaîne de doubles laisons. On fait l'hypothèse que tout se passe comme si ces électrons (de masse m) étaient confinés dans un puits inifini à une dimension de taille $L = 1,83$ nm.



1. Déterminer l'expression des niveaux d'énergie d'un électron dans un puits infini 1D de taille L.
2. Combien d'électrons sont délocalisés dans cette molécule ? Tracer son diagramme énergétique, sachant qu'il n'y a pas de dégénérescence, puis placer les électrons sur les différentes orbitales, dans l'état fondamental, en respectant les règles de remplissage des orbitales vues en chimie. Quel le dernier niveau d'énergie rempli du β-carotène ?
3. Calculer la différence d'énergie entre le dernier niveau rempli et le premier niveau vide. En déduire la longueur d'onde d'un photon qui serait absorbé lors d'une transition électronique entre ces deux niveaux.
4. Expliquer la couleur orangée des organismes qui contiennent une grande quantité de cette molécule (carottes, citrouilles,...).

TD31 : Introduction au monde quantique

⋆⋆ Exercice 7 : Puits infini 1D et équation de Schrödinger

On s'intéresse à une particule de masse m qui se déplace sur un axe (Ox) et qui est plongée dans un champ d'énergie potentielle (noté ici $V(x)$) ayant la forme d'un puits infini :

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < L \\ \infty & \text{si } x \geqslant L \end{cases}$$

Schrödinger a montré que pour caractériser les modes propres de cette particule à l'intérieur du puits, on doit exprimer la fonction d'onde sous la forme :

$$\psi_n(x,t) = \Psi_n(x) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$$

Où $i^2 = -1$, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ et $\Psi_n(x)$, qui caractérise le $n^{ième}$ mode propre de la particule dont l'énergie est E_n, vérifie l'équation différentielle suivante (équation de Schrödinger):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi_n}{dx^2} + V(x)\Psi_n(x) = E_n\Psi_n(x)$$

1. Montrer que cette équation impose que $\Psi_n(x) = 0$ en dehors du puits.

2. Montrer qu'à l'intérieur du puits :

$$\Psi_n(x) = A_n \sin(k_n x + \varphi_n)$$

   Exprimer k_n en fonction de $\hbar$, m et E_n. En déduire l'expression de la longueur d'onde λ_n en fonction de h, m et E_n.

3. Rappeler les conditions aux limites. En déduire la valeur de φ_n et montrer que l'énergie est quantifiée en donnant l'expression des différentes valeurs E_n possibles en fonction de h, m et L et d'un nombre entier n. Montrer enfin qu'on peut écrire:

$$\Psi_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

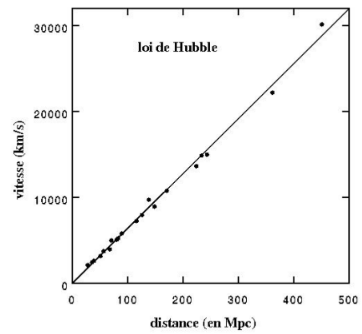
4. Donner l'expression de $\left|\psi_n(x,t)\right|^2$. Exprimer la relation de normalisation dans le cas du puits infini. En déduire l'expression de A_n.

   On donne $\displaystyle\int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2}$.

5. Tracer $\left|\psi_n(x,t)\right|^2$ pour $n = 1$, 2 et 3.

⋆⋆ Exercice 8 : Effet Doppler relativiste

En 1929, E. Hubble a établi que les galaxies éloignées de la Terre s'éloignent de nous avec une vitesse v proportionnelle à leur distance à la Terre (*cf* graphe de la loi de Hubble).



Dans le spectre d'émission d'une des galaxies situées dans la constellation de la Grande Ourse on détecte la raie H_α de la série de Balmer (correspondant à la transition du niveau $n_i = 3$ au niveau $n_f = 2$ pour l'atome d'hydrogène) dont la mesure de la longueur d'onde donne $\lambda = 0{,}689\,\mu$m.

Quelle est la vitesse de la galaxie et à quelle distance (en années-lumière) se situe-t-elle ?

Données :

1 pc (parsec) = $\frac{648000}{\pi}$ ua (unité astronomique) = $3{,}1.10^{16}$ m = 3,3 a.l.
célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}00.10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$
constante de Rydberg : $R_H = 1{,}097.10^7\,\mathrm{m^{-1}}$

L'effet Doppler-Fizeau relativiste traduit la différence entre la fréquence du signal émis par une source et la fréquence de ce même signal pour un observateur en mouvement par rapport à la source avec une vitesse v proche de c. Dans le cas où l'observateur s'éloigne dans la direction de propagation du signal, on montre que la fréquence f_{rec} reçue par l'observateur est reliée à la fréquence f_{em} émise par la source de la manière suivante : $f_{rec} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f_{em}$ où $\beta = \frac{v}{c}$.

Solutions :

Ex1 : 1. $N = 1{,}4.10^{30}$ photons par seconde. 2. $N \sim 10^4$ photons par seconde.
Ex2 : 1. $\lambda_{dB} \sim 10^{-35}$ m 2. $\lambda_{dB} \sim 5.10^{-11}$ m
Ex3 : 1. Lyman : $\lambda \in [91\,\mathrm{nm}, 122\,\mathrm{nm}]$ 2. Balmer : $\lambda \in [366\,\mathrm{nm}, 659\,\mathrm{nm}]$
Paschen : $\lambda \in [824\,\mathrm{nm}, 1883\,\mathrm{nm}]$ 3. $\lambda = \{412\,\mathrm{nm}, 436\,\mathrm{nm}, 488\,\mathrm{nm}, 659\,\mathrm{nm}\}$
Ex4 : $h = 6{,}6.10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$ $W = 1{,}7\,\mathrm{eV}$ $\lambda_s = 711\,\mathrm{nm}$
Ex5 : 1. $m = 3{,}4.10^{-26}$ kg 2. $\lambda = \frac{h}{\sqrt{3mk_BT}}$ 3. $\lambda \sim 2.10^{-8}$ m
Ex6 : 2. $E = 13{,}6$ eV 3. $\Delta E = 2{,}59$ eV $\lambda = 480$ nm
Ex7 : 2. $k_n = \frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar}$ $\lambda_n = \frac{h}{\sqrt{2mE_n}}$ 3. $\varphi_n = 0\ \forall n$ $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$ 4. $\left|\psi_n(x,t)\right| = A_n^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ $A_n = \sqrt{\frac{2}{L}}$
Ex8 : $v = 1{,}4 \times 10^7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $d = 210$ MPc