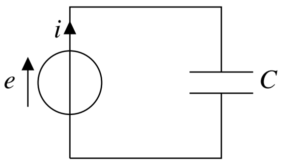
Corrigé DM30

Exercice : Mouvement d'une tige conductrice

1. Équation électrique : On exprime le flux magnétique à travers le circuit (on note qu'avec l'orientation choisie pour i le vecteur surface est de même sens que $\vec{B}$) : $\phi = BS$ avec S la surface du circuit, qui s'apparente à une portion de disque d'angle $\frac{\pi}{2} - \theta$. Sachant que l'aire d'un disque entier de rayon ℓ vaut $\pi\ell^2$, l'aire de cette portion vaut $S = \frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{2\pi} \times \pi\ell^2 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\ell^2$.

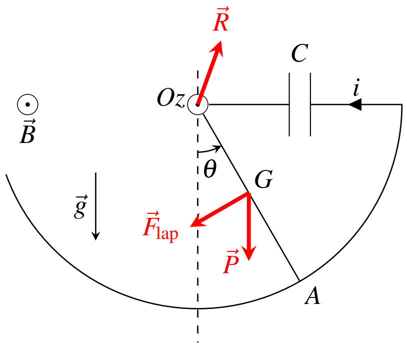
On calcule la f.e.m. d'induction en appliquant la loi de Faraday : $e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}B\ell^2\dot{\theta}$.

On représente le schéma électrique équivalent et on écrit la loi du condensateur :



$$i = C\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} \iff \boxed{i = \frac{1}{2}BC\ell^2\ddot{\theta}\ (E)}$$

Équation mécanique : On applique le théorème du moment cinétique à la tige par rapport à (Oz). La tige est soumise à son poids (s'appplique au centre de la tige G), à la réaction du pivot (en O) et aux actions de Laplace (force résultante s'applique en G).



$$I\ddot{\theta} = \mathcal{M}_z(\vec{P}) + \mathcal{M}_z(\vec{R}) + \mathcal{M}_z(\vec{F}_{\text{lap}})$$

On exprime la force de Laplace dans la base cylindrique, puis son moment par rapport à (Oz) :

$$\vec{F}_{\text{lap}} = i\overrightarrow{OA} \wedge \vec{B} = -iB\ell\vec{u}_\theta$$

$$\mathcal{M}_z(\vec{F}_{\text{lap}}) = (\overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}_{\text{lap}}) \cdot \vec{u}_z = -\frac{1}{2}iB\ell^2$$

Par ailleurs on a $\mathcal{M}_z(\vec{R}) = 0$ (bras de levier nul) et $\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -\frac{1}{2}mg\ell\sin\theta$. On conclut :

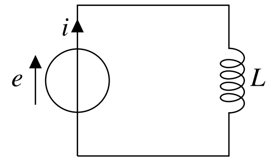
$$\frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta} = -\frac{1}{2}mg\ell\sin\theta - \frac{1}{2}iB\ell^2 \iff \boxed{\ddot{\theta} + \frac{3g}{2\ell}\sin\theta = -\frac{3B}{2m}i\ (M)}$$

2. On linéarise l'équation mécanique pour les petits angles ($\sin\theta \simeq \theta$) :

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2\ell}\theta = -\frac{3B}{2m} \times \frac{1}{2}BC\ell^2\ddot{\theta} \iff \left(1 + \frac{3CB^2\ell^2}{4m}\right)\ddot{\theta} + \frac{3g}{2\ell}\theta = 0$$

La tige effectue des oscillations harmoniques de pulsation : $\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{2\ell\left(1 + \frac{3CB^2\ell^2}{4m}\right)}}}$.

3. On reprend l'équation électrique avec ce nouveau schéma équivalent :



$$e = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \iff \frac{1}{2}B\ell^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

On intègre cette équation différentielle avec la condition initiale $\theta = 0$ lorsque $i = 0$, et on obtient :

$$\boxed{i = \frac{B\ell^2}{2L}\theta\ (E)}$$

L'équation mécanique de la question 1 est toujours valable et on la linéarise pour les petits angles :

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2\ell}\theta = -\frac{3B}{2m} \times \frac{B\ell^2}{2L}\theta \iff \ddot{\theta} + \left(\frac{3g}{2\ell} + \frac{3B^2\ell^2}{4mL}\right)\theta = 0$$

La tige effectue des oscillations harmoniques de pulsation : $\boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{3g}{2\ell} + \frac{3B^2\ell^2}{4mL}}}$.