CHAPITRE 26 — Statique des fluides

Ce chapitre est une introduction à la mécanique des fluides. Le programme de première année se limite au cas statique : le système est un liquide incompressible ou bien un gaz parfait au repos dans le champ de pesanteur terrestre. La dynamique, quant à elle, est étudiée en deuxième année.

On explique dans un premier temps comment modéliser l'état d'équilibre mécanique d'un fluide. Cela nous permet d'établir une équation différentielle qui relie le champ de pression au champ de pesanteur, appelée *loi fondamentale de la statique des fluides*.

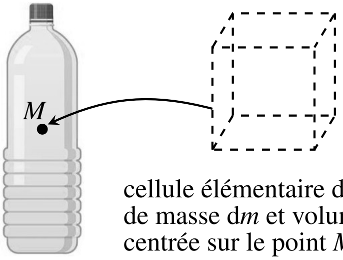
On montre par la suite que la loi fondamentale explique un fait expérimental bien connu : dans un fluide la pression augmente avec la profondeur (ou au contraire diminue avec l'altitude). Ceci est une conséquence directe de l'action de la pesanteur terrestre.

On s'intéresse enfin à la résultante des forces de pression qu'un fluide exerce sur corps immergé. On abordera le problème sous deux angles : par un calcul direct sous forme intégrale puis à l'aide de la *loi d'Archimède*.

1 Loi fondamentale de la statique des fluides

1.1 Milieu continu, élément de fluide

Les modèles utilisés en mécanique des fluides s'appuient sur une description **locale** qui consiste à “découper” le milieu en cellules de taille **mésoscopique**. Le fluide est alors vu comme un **milieu continu**, dans lequel on peut définir des grandeurs intensives comme la pression ou la température et les assimiler à des fonctions continues de la position dans l'espace.



cellule élémentaire de fluide de masse dm et volume dV centrée sur le point M

Masse volumique locale

On considère un élément de fluide centré sur un point M de l'espace, de masse dm et de volume dV. La masse volumique du fluide au point M est définie par :

$$\rho(M) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$$

Comme la pression et la température, la masse volumique est définie localement et peut varier d'un point à l'autre du fluide, notamment si celui-ci est compressible.

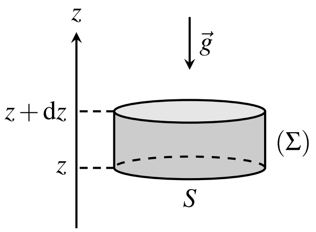
1.2 Modèle mécanique

On se propose d'étudier l'influence du champ de pesanteur terrestre sur le champ de pression dans un fluide au repos. On effectue d'emblée certaines hypothèses simplificatrices :

- **le champ de pesanteur $\vec{g}$ est supposé uniforme** (ce qui signifie que l'on se place à une échelle très petite comparée au rayon terrestre). On choisit comme repère un axe (Oz) vertical ascendant.
- le fluide étudié est invariant dans un plan horizontal. Autrement dit on suppose que **toute variable dépend uniquement de la coordonnée verticale** z. On admet que dans ces conditions les dimensions horizontales des cellules de fluides n'ont pas d'importance et peuvent être choisies arbitrairement. Ainsi on définit des cellules de hauteur dz et de section horizontale S quelconque (voir figure ci-dessous).

Le système d'étude (noté (Σ)) est donc un cylindre élémentaire compris entre les cotes z et $z+\mathrm{d}z$, de volume $\mathrm{d}V = S\mathrm{d}z$ et de masse $\mathrm{d}m = \rho(z)\mathrm{d}V$. On étudie son équilibre à l'aide de la mécanique newtonienne.

Remarque: Il est à noter qu'un tel système est **ouvert** du point de vue microscopique. En effet des particules entrent et sortent en permanence, ce qui implique potentiellement des transferts (de quantité de mouvement, d'énergie) entre des cellules voisines. On admet que dans le modèle des milieux continus il est équivalent de considérer ces cellules de fluide comme des **systèmes fermés** de masse dm constante, exerçant les unes sur les autres des forces de contact au niveau de leur interface (force de pression, force de viscosité).



portion cylindrique de fluide de hauteur dz constituant le système d'étude (Σ)

1.3 Résultante des forces de pression

(Σ) est soumis à des forces de pression de la part du fluide environnant. On les exprime pour chacune des interfaces :

- face inférieure : $\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{inf}} = P(z)S\vec{u}_z$;
- face supérieure : $\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{sup}} = -P(z+\mathrm{d}z)S\vec{u}_z$;
- la pression dépend uniquement de z donc elle a la même valeur dans un plan horizontal. Ainsi par symétrie la résultante des forces de pression qui s'exercent sur la paroi latérale est nulle : $\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{lat}} = \vec{0}$.

La résultante des forces de pression s'écrit :

$$\mathrm{d}\vec{F}_P = -S\mathrm{d}P\,\vec{u}_z$$

avec $\mathrm{d}P = P(z+\mathrm{d}z) - P(z)$ la variation de pression qui fait suite à un déplacement vertical dz. On peut vérifier que cette relation est identique si l'axe (Oz) est descendant.

1.4 Autres forces extérieures, bilan

En théorie (Σ) pourrait être soumis à des forces de viscosité de la part du fluide environnant mais en statique celles-ci n'interviennent pas. Nous considérons comme seule autre force extérieure le poids de la cellule de fluide : $\mathrm{d}\vec{F}_{\text{grav}} = \mathrm{d}m\vec{g} = \rho(z)S\mathrm{d}z\vec{g}$ (on évite ici la notation habituelle $\mathrm{d}\vec{P}$ pour le poids afin d'éviter toute confusion avec la pression).

Modèle mécanique d'un fluide au repos

Le système d'étude (Σ) est une portion cylindrique de fluide de hauteur $\mathrm{d}z$ et section S, au repos, assimilé à un système fermé de volume $\mathrm{d}V = S\mathrm{d}z$ et de masse $\mathrm{d}m = \rho(z)\mathrm{d}V$, soumis aux forces extérieures suivantes :

- poids $\mathrm{d}\vec{F}_{\text{grav}} = \rho(z)S\mathrm{d}z\vec{g}$;
- résultante des forces de pression $\mathrm{d}\vec{F}_P = -S\mathrm{d}P\vec{u}_z$.

1.5 Loi fondamentale de la statique des fluides

Loi fondamentale

En appliquant le principe fondamental de la statique à (Σ) dans le référentiel terrestre supposé galiléen ($\mathrm{d}\vec{F}_{\text{grav}} + \mathrm{d}\vec{F}_P = \vec{0}$), on établit l'équation différentielle qui relie le champ de pression au champ de pesanteur :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\vec{u}_z = \rho(z)\vec{g}}$$

<u>Remarque</u> : Le terme de gauche s'identifie au gradient de pression. On admet alors que la forme la plus générale de la loi fondamentale, pour un fluide et un champ de pesanteur quelconque, prend la forme suivante : $\overrightarrow{\text{grad}}\,P = \rho\vec{g}$.

<u>Remarque</u> : La projection de la loi fondamentale sur (Oz) permet d'obtenir une équation différentielle scalaire. Son expression dépend du sens choisi pour l'axe (Oz). Par exemple si l'axe (Oz) est **ascendant** alors $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ et on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho(z)g$$

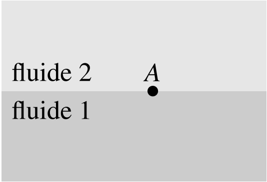
Dans le cas d'un axe **descendant** on a $\vec{g} = g\vec{u}_z$, ce qui conduit à : $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \rho(z)g$.

<u>Remarque</u> : Cette équation différentielle fait apparaître deux variables : la pression $P(z)$ et la masse volumique $\rho(z)$. Une autre relation est donc nécessaire si l'on souhaite la résoudre : il s'agit de **l'équation d'état** du milieu. Deux cas de figure sont au programme de ce chapitre : les liquides incompressibles et les gaz parfaits.

1.6 Continuité de la pression au niveau d'une surface libre

Une *surface libre* est une interface entre un liquide et un gaz ou bien entre deux liquides non miscibles (surface d'un océan, interface entre de l'eau et de l'huile dans un récipient). On admet que la pression est continue lorsque l'on traverse une surface libre :

$$P_{\text{fluide 1}}(A) = P_{\text{fluide 2}}(A)$$



2 Fluide incompressible et homogène

Un fluide est incompressible si sa masse volumique est indépendante de la pression (ce modèle est ici utilisé pour décrire des liquides). Dans ce paragraphe on s'intéresse à un milieu homogène (c'est-à-dire constitué d'une seule phase) et on suppose pour simplifier que la température est uniforme. L'équation d'état prend alors la forme suivante : $\boxed{\rho = \text{Cste}}$.

Exemple

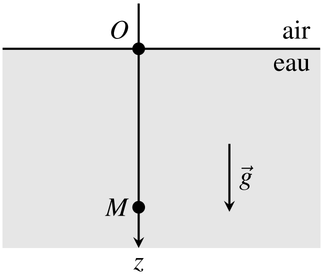
La contrainte principale à laquelle est soumise un sous-marin est celle liée à la pression exercée par le fluide environnant sur la structure de l'habitacle. L'évaluation des pression rencontrées au fond de l'océan est donc cruciale pour déterminer les efforts que devront supporter les parois qui protègent le pilote.
On se place dans un repère cartésien de centre O, placé à la surface de l'eau, et d'axe Oz descendant. L'eau de mer est assimilé à un fluide incompressible de température uniforme et de masse volumique ρ_0.

Données : $P_0 = 1{,}01 \cdot 10^5\,\text{Pa}$, $\rho_0 = 1{,}02 \cdot 10^3\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $g = 9{,}81\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1. Déterminer la pression $P(z)$ à une profondeur donnée z en fonction de la pression atmosphérique P_0, l'intensité de la pesanteur g, supposée uniforme, qui règne dans l'océan, ρ_0 et z. Tracer l'allure de $P(z)$.

2. La pression dans la fosse des Mariannes (profondeur $z_{\text{max}} = 10{,}9\,\text{km}$) a été mesurée à $1{,}13 \cdot 10^8\,\text{Pa}$. Comparer à la prédiction du modèle utilisé dans cet exercice. Proposer une amélioration.

► **Schéma + loi fondamentale**



1. On représente schématiquement la situation. On projette la loi fondamentale de la statique des fluides sur $\vec{u}_z$. Puisque l'axe (Oz) est descendant on a :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \rho_0 g$$

► Calcul du champ de pression par intégration

On intègre la loi fondamentale entre l'origine O située à la surface et un point M de profondeur z quelconque. Par continuité de la pression à l'interface air/eau : $P(z=0) = P_0$. On choisit ici d'intégrer en utilisant la méthode de séparation des variables. Sachant que ρ_0 et g sont des constantes on peut écrire :

$$\int_{P_0}^{P(z)} \mathrm{d}P = \int_0^z \rho_0 g \mathrm{d}z = \rho_0 g \int_0^z \mathrm{d}z$$

On conclut :

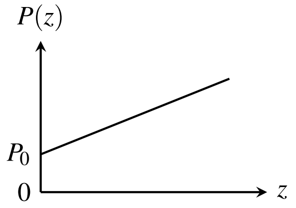
$$P(z) - P_0 = \rho_0 g z \implies \boxed{P(z) = P_0 + \rho_0 g z}$$

Remarque : Il est bien entendu possible d'intégrer directement la loi fondamentale sous la forme $P(z) = \rho_0 g z + C$ puis de trouver la constante d'intégration C avec la condition limite $P(z=0) = P_0$. La méthode de séparation des variables a différents avantages ; elle permet notamment de calculer rapidement la différence de pression entre deux points d'un fluide, chose que l'on sera amené à faire régulièrement dans les applications de ce chapitre.

► Étude du champ de pression

Le résultat de la question 1 montre que la pression augmente de manière **affine** avec la profondeur (voir graphe ci-contre).

Remarque : En prenant le valeurs numériques de la question 2 on trouve que le gradient vertical de pression a pour valeur $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \rho_0 g = 1{,}00 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa \cdot m^{-1}}$. Cela signifie que la pression de l'eau augmente à mesure de 1 bar tous les 10 m de profondeur. On note que plus le fluide est dense et plus la pression varie rapidement selon la verticale.



► Analyse critique du modèle

2. Le modèle utilisé dans cet exercice conduit à une valeur de pression au fond de la fosse des Mariannes : $P_{\text{modèle}}(z_{\max}) = 1{,}09 \cdot 10^8\,\mathrm{Pa}$. On compare à la valeur mesurée en calculant un écart relatif :

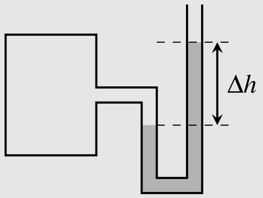
$$\frac{P_{\text{mesuré}}(z_{\max}) - P_{\text{modèle}}(z_{\max})}{P_{\text{mesuré}}(z_{\max})} = \boxed{3{,}4 \cdot 10^{-2}}$$

On trouve un écart d'environ 3% avec l'expérience. Pour améliorer le modèle on peut tenir compte de la **compressibilité** de l'eau, c'est-à-dire le fait que l'eau devient plus dense lorsque la pression augmente. Bien que l'eau liquide soit très peu compressible, la pression au fond de la fosse des Mariannes est si importante (de l'ordre de 1 000 bars) que cela peut avoir un impact non négligeable sur sa masse volumique (on peut effectivement montrer qu'à lui seul ce paramètre induit un écart de densité d'environ 5% entre la surface et $z_{\max}$).

On pourrait également prendre en considération les variations verticales de température et de salinité, qui ont une influence sur la densité.

Exemple

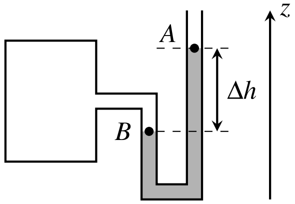
Une enceinte contient un gaz sous pression. Un manomètre à eau permet d'évaluer l'écart de pression ΔP avec l'atmosphère.
On mesure $\Delta h = 3{,}5\,\text{cm}$ entre les deux surfaces libres. La masse volumique de l'eau vaut $\rho = 1\,000\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et l'intensité de la pesanteur $g = 9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.



Calculer ΔP.

► Calculer la différence de pression entre deux points d'un fluide

On définit un axe (Oz) vertical ascendant donc la loi fondamentale s'écrit sous la forme : $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g$. On l'intègre entre deux points A et B situés au niveau des surfaces libres.

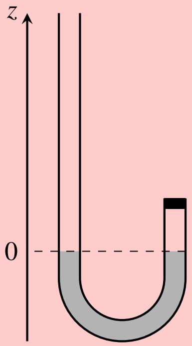


$$\int_{P_A}^{P_B} \mathrm{d}P = -\int_{z_A}^{z_B} \rho g \mathrm{d}z \iff P_B - P_A = -\rho g(z_B - z_A) = \rho g \Delta h$$

L'écart de pression entre l'enceinte et l'extérieur vaut $\boxed{\Delta P = \rho g \Delta h = 343\,\text{Pa}}$.

Application 1

On verse du mercure de masse volumique ρ_m à l'intérieur d'un tube en U de section s, puis on bouche l'une des extrémités de manière à emprisonner un volume d'air V_0 à la pression atmosphérique P_0. La hauteur initiale des surfaces libres définit l'origine d'un axe (Oz) ascendant (voir figure ci-contre).



On verse ensuite à nouveau du mercure dans la branche ouverte, lentement, jusqu'à ce que le volume de l'air comprimé devienne égal à $V_1 = \frac{V_0}{2}$. On note V_m le volume de mercure ajouté pendant cette opération, qui s'effectue à température constante. Dans l'état final on note z_1 la hauteur de la surface libre dans la branche fermée du tube et z_1' celle dans la branche ouverte. L'air est assimilé à un gaz parfait.

Données : $P_0 = 1{,}00\,\text{bar}$, $V_0 = 100\,\text{cm}^3$, $s = 5{,}00\,\text{cm}^2$, $\rho_m = 13{,}6\cdot 10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, intensité de la pesanteur : $g = 9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

1. Réaliser un schéma du montage dans l'état final. Dans quelle branche la hauteur de mercure est-elle la plus élevée ? Justifier.

2. Calculer z_1 et la pression P_1 de l'air comprimé.

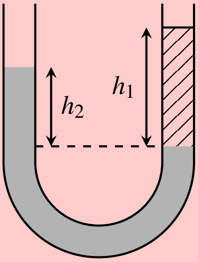
3. Le mercure étant incompressible, déterminer une relation entre V_m, s, z_1 et z_1'.

4. À l'aide de la loi fondamentale déterminer une relation entre P_0, P_1, ρ_m, g, z_1 et z_1'.

5. Calculer V_m.

Application 2

Un tube en U est rempli avec de l'eau de masse volumique ρ_e et de l'huile de masse volumique ρ_h. Les deux liquides sont en contact avec l'atmosphère de pression P_0. On mesure $h_1 = 12\,\text{cm}$ et $h_2 = 9\,\text{cm}$.



1. Exprimer la pression au niveau de l'interface eau/huile en fonction de P_0 de deux manières différentes.

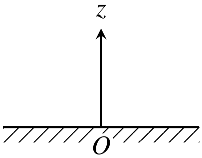
2. En déduire la valeur de ρ_h sachant que $\rho_e = 1\,000\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

3 Gaz parfait, modèles d'atmosphère

On montre comment déterminer le champ de pression dans un gaz en s'appuyant sur l'exemple de l'atmosphère terrestre. En pratique ce milieu est très complexe et dynamique. Dans ce chapitre on simplifie l'étude au maximum en effectuant différentes approximations. On suppose notamment que l'atmosphère est un milieu **statique**. Cela permet d'avoir une idée approximative du champ de pression avec un minimum de complexité mathématique.

3.1 Modèle de l'atmosphère isotherme

On modélise l'atmosphère en effectuant les approximations suivantes :



• elle occupe le demi-espace $z > 0$ (on néglige le relief et la courbure de la surface terrestre ; on l'assimile à un plan confondu avec le niveau de la mer et que l'on choisit comme altitude de référence) ;

• elle est en équilibre isotherme, c'est-à-dire qu'elle est statique et de température T uniforme ;

• elle est assimilée à un gaz parfait de masse molaire moyenne M (on ne tient pas compte du fait qu'il s'agit en réalité d'un mélange de différents gaz) ;

• le champ de pesanteur $\vec{g}$ est uniforme.

3.2 Champ de pression dans l'atmosphère isotherme

Exemple

L'atmosphère terrestre est assimilée à un gaz parfait de masse molaire moyenne M en équilibre à la température $T = 288\,\text{K}$. On note z l'altitude mesurée par rapport au sol. La pression au sol est $P_0 = 1{,}0\,\text{bar}$. Le champ de pesanteur est uniforme, d'intensité $g = 9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. On donne $R = 8{,}31\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$.

1. Sachant que l'air est composé approximativement de 80% de diazote et 20% de dioxygène, calculer M. On donne $M(N) = 14\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ et $M(O) = 16\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

2. Exprimer la masse volumique de l'air $\rho(z)$ en fonction de la pression $P(z)$.

3. Établir la loi de variation de de pression $P(z)$, puis celle de la masse volumique $\rho(z)$. On fera apparaître une hauteur caractéristique H dont on donnera l'expression, la valeur numérique et la signification physique.

On cherche à évaluer la masse de l'atmosphère terrestre.

4. Exprimer la masse m d'une colonne d'air cylindrique de section S et de hauteur infinie, d'abord sous forme intégrale puis en fonction de P_0, g et S.

5. Faire l'application numérique en prenant pour S la valeur de la surface terrestre. Le rayon terrestre vaut $R_T = 6{,}4 \cdot 10^3\,\text{km}$.

► **Calculer la masse molaire moyenne de l'air**

1. On calcule une moyenne pondérée des masses molaires du diazote et du dioxygène :

$$M = 0{,}8 \times M(\mathrm{N_2}) + 0{,}2 \times M(\mathrm{O_2}) = 0{,}8 \times 28 + 0{,}2 \times 32 \implies \boxed{M = 29\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}}$$

► **Écrire la loi des gaz parfaits sous forme intensive**

2. Pour une certaine quantité d'air n on écrit la loi des gaz parfaits sous la forme extensive : $PV = nRT$. On peut également exprimer cette loi sous forme massique (donc intensive) :

$$\frac{PV}{m} = \frac{nRT}{m} \iff \frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M} \iff \boxed{\rho(z) = \frac{P(z)M}{RT}}$$

► **Calculer le champ de pression dans l'atmosphère isotherme**

3. D'après le résultat de la question précédente on peut écrire loi fondamentale sous la forme :

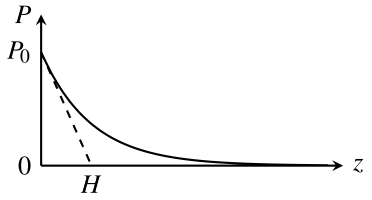
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g = -\frac{Mg}{RT}P \iff \frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{Mg}{RT}\mathrm{d}z$$

On intègre entre la surface $(z = 0, P = P_0)$ et un point d'altitude z quelconque. La température T et l'intensité de la pesanteur g étant supposés constantes, on trouve :

$$\int_{P_0}^{P(z)} \frac{\mathrm{d}P}{P} = \int_0^z -\frac{Mg}{RT}\mathrm{d}z \iff \ln\frac{P(z)}{P_0} = -\frac{Mgz}{RT} \iff \boxed{P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)}$$

On exprime $\rho(z)$ grâce à l'équation d'état intensive : $\boxed{\rho(z) = \frac{P_0 M}{RT}\exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)}$.

On trace l'allure de $P(z)$ sur la figure ci-contre. Par analogie avec ce qui a été vu pour les fonctions variant exponentiellement dans le temps, on peut définir une distance caractéristique H correspondant à l'intersection de la tangente à l'origine et de l'asymptote.

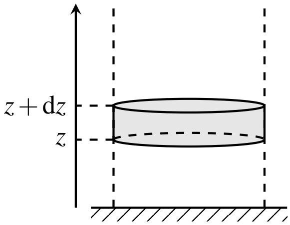


Cela revient à écrire : $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$, avec $\boxed{H = \frac{RT}{Mg} = 8{,}5\,\text{km}}$.

La majorité des particules de l'atmosphère se trouvent dans une couche haute d'environ $5H$ au-dessus de la surface. La grandeur H permet ainsi d'évaluer un ordre de grandeur de **l'épaisseur de l'atmosphère terrestre** (quelques dizaines de kilomètres).

► **Exprimer la masse d'une colonne d'air en équilibre**

4. On isole d'abord une portion d'air située à l'intérieur d'un cylindre élémentaire de section S et hauteur $\mathrm{d}z$. Celle-ci occupe un volume $\mathrm{d}V = S\mathrm{d}z$ et a pour masse $\mathrm{d}m = \rho(z)\mathrm{d}V = \rho(z)S\mathrm{d}z$.



On intègre entre $z = 0$ et $z = +\infty$ pour obtenir la masse d'air totale à l'intérieur de la colonne cylindrique : $\boxed{m = \int_0^\infty \rho(z)S\mathrm{d}z}$.

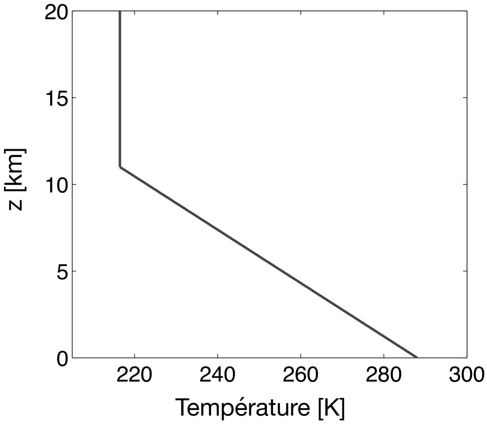
On calcule cette intégrale en utilisant le résultat de la question 3 :

$$m = \int_0^\infty \frac{P_0 MS}{RT} \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right) \mathrm{d}z = \frac{P_0 MS}{RT}\left[-\frac{RT}{Mg}\exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)\right]_0^\infty \iff \boxed{m = \frac{P_0 S}{g}}$$

5. La surface terrestre vaut $S = 4\pi R_T^2$. On en déduit que $\boxed{m = 5{,}2 \cdot 10^{18}\,\text{kg}}$.

3.3 Modèle de l'atmosphère polytropique

Le modèle de l'atmosphère isotherme est simpliste à bien des égards. On peut l'améliorer en tenant compte des variations de la température avec l'altitude. La plupart des phénomènes météorologiques ont lieu dans la troposphère, qui est la première couche de l'atmosphère en partant du sol. Selon la saison et la latitude son épaisseur peut varier entre 8 km et 15 km. Les relevés météorologiques montrent que la température décroît de façon régulière quand on s'élève dans la troposphère. Un modèle pertinent consisterait à remplacer l'hypothèse isotherme par celle d'un **gradient de température uniforme** (c'est-à-dire tel que $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = \text{Cste}$). Ce type de modèle est notamment utilisé en aéronautique pour définir une "atmosphère standard" (voir figure ci-contre).



Profil vertical de température du modèle international d'atmosphère standard utilisé en aéronautique. La partie affine ($z < 11\,km$) correspond à la troposphère et la partie stationnaire ($z > 11\,km$) à la stratosphère

Modèle d'atmosphère polytropique

Ce modèle repose sur l'hypothèse d'un gradient de température vertical uniforme :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = -a = \mathrm{Cste}$$

avec comme valeur typique $a = 6,5\,\mathrm{K} \cdot \mathrm{km}^{-1}$.

Application 3

On reprend les hypothèses du modèle présenté au paragraphe 3.1, mais on considère désormais un gradient de température uniforme : $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = -a = \mathrm{Cste}$. Au niveau de la surface $(z = 0)$ on note $T_0 = 288\,\mathrm{K}$ la température et $P_0 = 1,0\,\mathrm{bar}$ la pression.

1. Exprimer $T(z)$ en un point de la troposphère d'altitude z quelconque.

2. Montrer que la pression varie avec l'altitude selon : $P(z) = P_0\,(1 - \alpha z)^{\beta}$ avec α et β des constantes à exprimer en fonction de a, T_0, M g et R.

4 Résultante des forces de pression : calcul direct

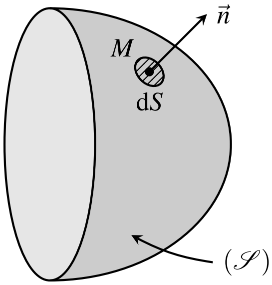
4.1 Expression intégrale

On considère une surface $(\mathscr{S})$ en contact avec un fluide. Pour calculer la résultante des forces de pression exercées par le fluide sur $(\mathscr{S})$, on procède à un découpage en surfaces élémentaires.

La force de pression qui s'exerce sur un élément de surface d'aire dS, centré sur un point M appartenant à $(\mathscr{S})$, vaut :

$$\mathrm{d}\vec{F}_P = P(M)\vec{n}\mathrm{d}S$$

avec $\vec{n}$ un vecteur unitaire normal à la surface en M et dirigé du côté opposé au fluide (voir figure ci-contre).



Résultante des forces de pression sur une surface

La résultante des forces de pression s'obtient en sommant les forces élémentaires qui s'exercent en chacun des points appartenant à $(\mathscr{S})$:

$$\boxed{\vec{F}_P = \iint_{M \in (\mathscr{S})} P(M)\vec{n}\mathrm{d}S}$$

Cette intégrale porte sur les points d'une surface (c'est-à-dire un espace à deux dimensions), c'est pourquoi on parle **d'intégrale double**.

⚠ Le vecteur $\vec{n}$ dépend *a priori* du point M donc il doit rester sous l'intégrale ! En revanche si c'est un vecteur fixe on peut le faire sortir de l'intégrale. On retient donc la règle suivante : **si $\vec{n}$ est un vecteur mobile alors il faut le projeter dans une base fixe**.

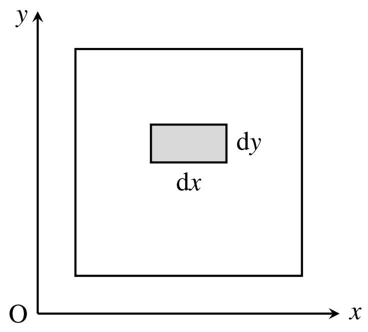
4.2 Choix du paramétrage

Le découpage d'une surface s'effectue en choisissant un système de coordonnées. En fonction de la forme de la surface, on utilisera le paramétrage le plus approprié pour faciliter les calculs. On présente ci-dessous quelques exemples classiques.

rectangle

paramétrage cartésien :

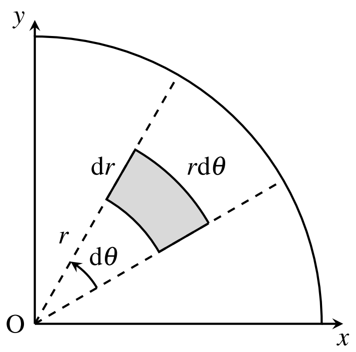
$\boxed{\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y}$



portion de disque

paramétrage polaire :

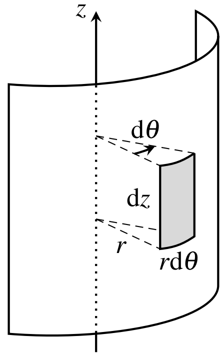
$\boxed{\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}$



portion de cylindre

paramétrage cylindrique :

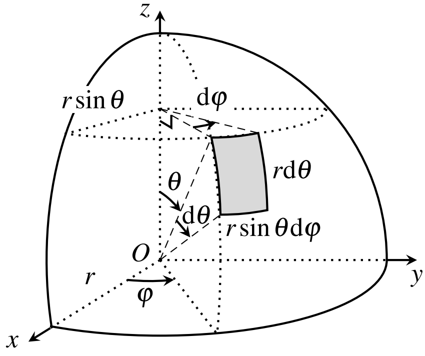
$\boxed{\mathrm{d}S = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z}$



portion de sphère

paramétrage sphérique :

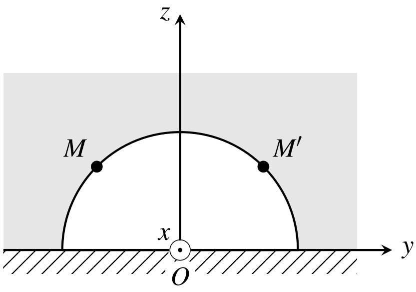
$\boxed{\mathrm{d}S = r^2 \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}$

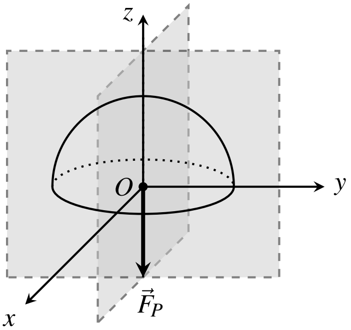


4.3 Exploitation des symétries

Symétries et direction de la résultante des forces de pression

Si $(\mathscr{S})$ est une surface en contact avec un fluide et s'il existe un plan (Π) qui est à la fois un plan de symétrie pour $(\mathscr{S})$ et pour le champ de pression, alors la résultante des forces qui s'exercent sur cette surface **appartient à** (Π).





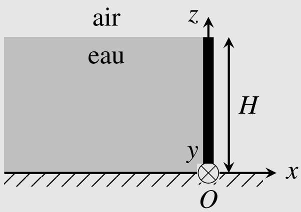
On prend l'exemple d'un dôme hémisphérique $(\mathscr{S})$ placé au fond d'un bassin rempli d'eau. Le plan (Oxz) est un plan de symétrie pour le dôme. Or, comme le champ de pression dépend uniquement de z alors en deux points M et M' symétriques par rapport à (Oxz) les pressions sont identiques (voir figure ci-dessus, à gauche). Cela signifie que (Oxz) est également un plan de symétrie pour le champ de pression.

Le même raisonnement est valable pour le plan (Oyz), et même pour tout plan qui contient l'axe (Oz) (voir figure ci-dessus, à droite). On conclut que la résultante des forces de pression qui s'exercent sur $(\mathscr{S})$ est contenu à la fois dans (Oxz) et (Oyz), donc **elle est colinéaire à** $\vec{u}_z$.

4.4 Applications

Exemple

Un barrage hydroélectrique retient un volume d'eau de hauteur $H = 130\,\mathrm{m}$ et de largeur $L = 650\,\mathrm{m}$ (dans la direction perpendiculaire à la figure ci-contre). La masse volumique de l'eau est $\rho = 1\,000\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. La pression de l'air est supposée uniforme et vaut $P_0 = 1,0\,\mathrm{bar}$. On prendra $g = 9,81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.



1. Calculer la loi de variation de la pression $P(z)$ dans l'eau.

2. Calculer la résultante des forces de pression exercées par l'air sur le barrage $\vec{F}_{\text{air}}$.

3. Calculer la résultante des forces de pression exercées par l'eau sur le barrage $\vec{F}_{\text{eau}}$.

4. Déterminer numériquement la norme de la force totale $F = \left\|\vec{F}_{\text{air}} + \vec{F}_{\text{eau}}\right\|$.

► Intégrer la loi fondamentale

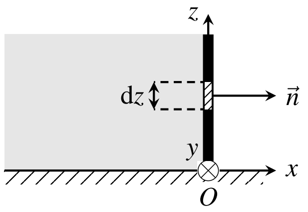
1. On intègre la loi fondamentale entre un point situé à la surface $(z = H, P = P_0)$ et un point de l'eau d'altitude z quelconque :

$$\int_{P_0}^{P(z)} \mathrm{d}P = -\int_H^z \rho g \mathrm{d}z \iff P(z) - P_0 = -\rho g(z-H) \iff \boxed{P(z) = P_0 + \rho g(H-z)}$$

► Calculer une résultante des forces de pression : un cas simple

2. C'est un cas simple car la surface est plane et la pression de l'air P_0 uniforme. On raisonne comme au chapitre 21, sans avoir besoin de mener un calcul intégral. La surface totale du barrage est $S = LH$ et la force exercée par l'air est dirigée selon $-\vec{u}_x$: $\boxed{\vec{F}_{\text{air}} = -P_0 LH\vec{u}_x}$.

► Calculer une résultante des forces de pression par la méthode intégrale



3. La pression de l'eau sur le barrage n'est pas uniforme, il faut passer par la méthode intégrale. Le barrage est rectangulaire donc on définit des éléments de surface avec un paramétrage cartésien : $\mathrm{d}S = \mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Les bornes d'intégration sont $(0 \le y \le L$ et $0 \le z \le H)$. Le vecteur normal est le même en tout point du barrage : $\vec{n} = \vec{u}_x$. La résultante des forces de pression exercées par l'eau s'écrit sous la forme intégrale :

$$\vec{F}_{\text{eau}} = \int_0^L \int_0^H P(z)\vec{u}_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^L \int_0^H P(z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ \vec{u}_x$$

On peut faire sortir le vecteur $\vec{u}_x$ de l'intégrale car il est fixe.

Calcul d'une intégrale double

Soient x et y deux variables indépendantes, I un intervalle indépendant de y et J un intervalle indépendant de x. Pour toutes fonctions $x \mapsto f(x)$ intégrable sur I et $y \mapsto g(y)$ intégrable sur J alors :

$$\int_I \int_J f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_I f(x)\mathrm{d}x \int_J g(y)\mathrm{d}y$$

Appliqué au cas qui nous intéresse, cela signifie que l'on peut écrire :

$$\int_0^L \int_0^H P(z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^L \mathrm{d}y \int_0^H P(z)\mathrm{d}z = L\int_0^H P(z)\mathrm{d}z$$

On calcule l'intégrale sur z :

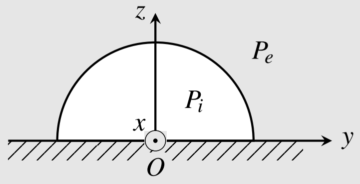
$$\int_0^H [P_0 + \rho g(H-z)]\,\mathrm{d}z = \int_0^H P_0\mathrm{d}z + \rho g\int_0^H (H-z)\mathrm{d}z = P_0 H + \frac{1}{2}\rho g H^2$$

On conclut : $\boxed{\vec{F}_{\text{eau}} = \left(P_0 LH + \frac{1}{2}\rho g L H^2\right)\vec{u}_x}$.

4. La force de pression totale qui s'exerce sur le barrage vaut $\vec{F} = \frac{1}{2}\rho g L H^2 \vec{u}_x$. On calcule sa norme : $\boxed{F = 5{,}4 \cdot 10^{10}\,\mathrm{N}}$.

Exemple

On envisage de réaliser une habitation martienne en posant sur le sol un dôme cylindrique de rayon $R = 2{,}5\,\mathrm{m}$ et longueur $L = 15\,\mathrm{m}$ dans la direction Ox. On cherche à savoir si le dôme peut rester stable grâce à son propre poids, sans dispositif d'ancrage. L'air intérieur est de composition et pression semblable à celle de l'atmosphère terrestre : $P_i = 100\,\mathrm{kPa}$, tandis que la pression de l'atmosphère martienne est égale à $P_e = 0{,}60\,\mathrm{kPa}$. À la surface de mars l'intensité de la pesanteur vaut $g = 3{,}7\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.



1. Comme est orientée la force de pression totale $\vec{F}$ qui s'exerce sur le dôme ?

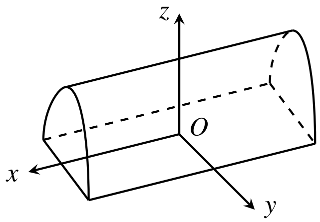
2. Exprimer $\vec{F}$ en fonction de P_i, P_e, R et L.

3. En déduire la masse minimale du dôme qui lui permet de rester stable sur le sol.

4. Calculer l'épaisseur des parois du dôme, sachant qu'il doit être construit avec un verre de masse volumique $\rho = 2{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Commenter.

► **Trouver la direction d'une force de pression à l'aide des symétries**

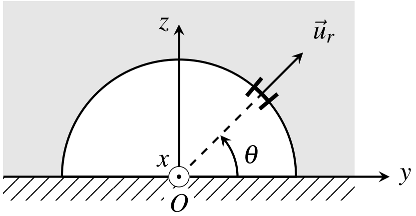
1. On représente le dôme en perspective sur la figure ci-contre. Les plans (Oxz) et (Oyz) sont des plans de symétrie pour le dôme et pour le champ de pression. On conclut que la direction de $\vec{F}$ est à l'intersection de ces deux plans : **la force $\vec{F}$ est dirigée selon $\vec{u}_z$.**



► **Calculer une résultante des forces de pression par la méthode intégrale**

2. On définit des éléments de surface avec un paramétrage cylindrique : $\mathrm{d}S = R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x$. Les bornes d'intégration sont $(0 \leq \theta \leq \pi \;\text{ et }\; 0 \leq x \leq L)$.

Chaque élément de surface est soumis à la force $P_i \mathrm{d}S\vec{u}_r$ de la part de l'air intérieur et $-P_e \mathrm{d}S\vec{u}_r$ de la part de l'atmosphère martienne. La force de pression totale s'écrit donc :



$$\vec{F} = \int_0^{\pi}\int_0^{L} (P_i - P_e)\vec{u}_r R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x = (P_i - P_e)R\int_0^{\pi}\int_0^{L} \vec{u}_r \mathrm{d}\theta\mathrm{d}x$$

Le vecteur $\vec{u}_r$ varie en fonction du point du dôme, il dépend notamment de θ. On poursuit le calcul en projetant ce vecteur dans la base fixe $(\vec{u}_y, \vec{u}_z)$: $\vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{u}_y + \sin\theta\,\vec{u}_z$.

On décompose ainsi la force $\vec{F}$ en deux intégrales, dans lesquelles on peut sortir les vecteurs fixes $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$:

$$\vec{F} = (P_i - P_e)R\left[\int_0^{\pi}\int_0^{L}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x\,\vec{u}_y + \int_0^{\pi}\int_0^{L}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x\,\vec{u}_z\right]$$

On calcule les deux intégrales :

$$\begin{cases} \int_0^{\pi}\int_0^{L}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{L}\mathrm{d}x = 0 \\ \int_0^{\pi}\int_0^{L}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{L}\mathrm{d}x = 2L \end{cases}$$

On conclut : $\boxed{\vec{F} = 2(P_i - P_e)RL\vec{u}_z}$. Cette force est dirigée selon $\vec{u}_z$, conformément à l'analyse de la question 1.

3. Le dôme reste stable à condition que $\|\vec{P}\| > \|\vec{F}\|$. On en déduit la condition vérifiée par sa masse :

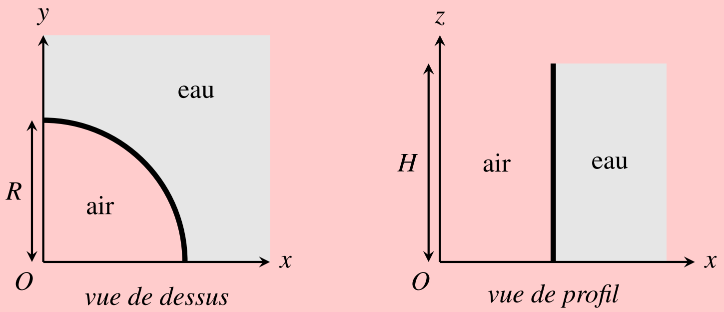
$$mg > 2(P_i - P_e)RL \iff \boxed{m > \frac{2(P_i - P_e)RL}{g} = 2{,}0\cdot 10^6\,\mathrm{kg}}$$

4. À condition que l'épaisseur e des parois du dôme soit faible devant son rayon R, on peut écrire son volume sous la forme approchée : $V = Se$ avec $S = \pi RL + \pi R^2$ la surface totale du dôme (paroi latérale + côtés). On en déduit que :

$$m = \rho V = \rho e\pi R(L+R) \iff \boxed{e = \frac{m}{\rho\pi R(L+R)} = 5{,}9\,\mathrm{m}}$$

Non seulement l'épaisseur n'est pas négligeable devant le rayon mais elle est même supérieure ! On conclut qu'un tel dôme reposant sur le sol grâce à son propre poids n'est pas une solution envisageable pour une habitation martienne.

Application 4



Un barrage-voûte en béton a la forme d'un quart de cylindre de rayon R et de hauteur H. On note ρ_e la masse volumique de l'eau et g l'intensité de la pesanteur. La pression de l'air P_0 est uniforme.

1. À l'aide d'arguments de symétrie, déterminer la direction de la résultante des forces de pression qui s'exercent sur le barrage $\vec{F} = \vec{F}_{\text{air}} + \vec{F}_{\text{eau}}$, puis représenter le sens de cette résultante sur un schéma en vue de dessus.

2. Exprimer la résultante $\vec{F}_{\text{air}}$ des forces de pression exercées par l'air sur le barrage en fonction de P_0, R et H.

3. En supposant que l'eau est un fluide incompressible, établir l'expression du champ de pression $P(z)$ dans l'eau.

4. Exprimer la résultante $\vec{F}_{\text{eau}}$ des forces de pression exercées par l'eau sur le barrage en fonction de R, H, P_0, g et ρ_e.

5. En déduire que la norme de la résultante des forces de pression qui s'exercent sur ce barrage vaut :

$$F = \frac{R\rho_e g H^2}{\sqrt{2}}$$

5 Poussée d'Archimède

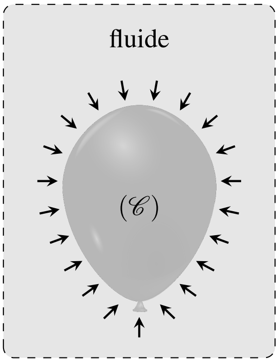
5.1 Définition

Poussée d'Archimède

On appelle *poussée d'Archimède* $\vec{\Pi}$ la résultante des forces de pression exercées par un fluide **en équilibre dans le champ de pesanteur** sur un corps $(\mathscr{C})$ entièrement immergé dans ce fluide et **immobile par rapport à lui**. Si l'on note $(\mathscr{S})$ la surface de $(\mathscr{C})$ alors la poussée d'Archimède est définie par :

$$\vec{\Pi} = \oiint_{M\in(\mathscr{S})} P(M)\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

avec $P(M)$ la pression du fluide en un point M de la surface. Le symbole $\oiint$ désigne une intégrale sur une surface **fermée**, c'est-à-dire qui délimite un espace intérieur clos.

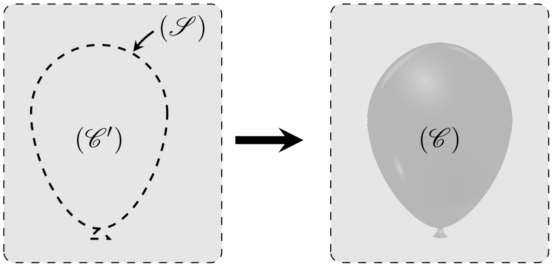


5.2 Loi d'Archimède

À moins que $(\mathscr{S})$ ait une forme très simple, le calcul direct de la poussée d'Archimède par la méthode intégrale est exclu car trop complexe et fastidieux. On peut toutefois simplifier les choses avec un peu d'astuce. Pour cela il faut comprendre que $\vec{\Pi}$ est entièrement caractérisée par le champ de pression au niveau de $(\mathscr{S})$. La poussée d'Archimède ne dépend donc pas de la composition du corps $(\mathscr{C})$ mais uniquement de son interface $(\mathscr{S})$ avec le fluide.

Imaginons maintenant ce qu'il se passe **avant** que $(\mathscr{C})$ soit immergé. L'espace est alors entièrement occupé par le fluide au repos. On définit le système $(\mathscr{C}')$ comme la portion de fluide ayant exactement la même surface que $(\mathscr{C})$ (voir figure ci-contre). Ces deux systèmes sont donc soumis à la même poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ de la part du fluide environnant.

$(\mathscr{C}')$ est appelé *fluide déplacé* car il s'agit du volume de fluide dont $(\mathscr{C})$ **prend la place** lorsqu'il est immergé. On note m' sa masse.

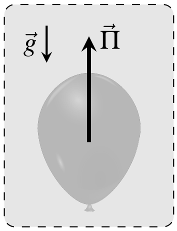


Le corps immergé $(\mathscr{C})$ et le fluide qu'il déplace $(\mathscr{C}')$ ont la même surface $(\mathscr{S})$ donc ils sont soumis à la même poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$

Par définition le système $(\mathscr{C}')$ est en équilibre (car le fluide est au repos dans le référentiel d'étude supposé galiléen). D'après le principe fondamental de la statique :

$$\vec{\Pi} + \vec{P}_{\text{fluide déplacé}} = \vec{0} \iff \boxed{\vec{\Pi} = -m'\vec{g}}$$

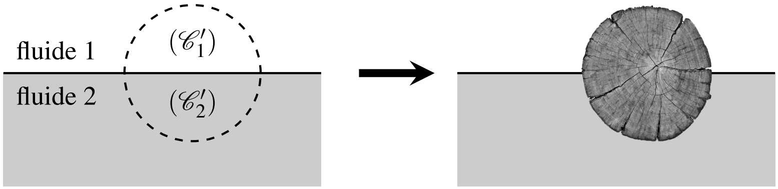
Le résultat obtenu porte le nom de *loi d'Archimède*.



Loi d'Archimède

La poussée d'Archimède qu'un fluide exerce sur un corps immergé est égal à **l'opposé du poids du fluide déplacé**. Il s'agit donc d'une force verticale et ascendante.

Remarque : La loi d'Archimède n'est valable qu'à condition que le fluide et le corps immergé soient **statiques**. En pratique si $(\mathscr{C})$ se déplace lentement dans le fluide alors on considère que cette loi reste valable en première approximation.



Remarque : Si un corps flotte au niveau d'une surface libre, on admet que l'on peut appliquer la loi d'Archimède séparément à chaque fluide. On additionne les poussées d'Archimède pour avoir la force de pression résultante exercée par les deux fluides :

$$\vec{\Pi} = \vec{\Pi}_{\text{fluide 1}} + \vec{\Pi}_{\text{fluide 2}} = -m'_1\vec{g} - m'_2\vec{g}$$

avec m'_1 (resp. m'_2) la masse du fluide déplacé $(\mathscr{C}'_1)$ (resp. $(\mathscr{C}'_2)$, voir figure ci-dessus).

Exemple

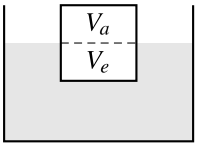
Un glaçon flotte à la surface d'un verre d'eau. On définit la fraction volumique immergée du glaçon par $x = V_e/V_g$ avec V_g le volume total du glaçon et V_e le volume immergé dans l'eau.

1. Exprimer x en fonction des masses volumiques de l'eau liquide ρ_e, de la glace ρ_g et de l'air ρ_a. Quelle approximation raisonnable peut-on faire ?

2. Justifier la hauteur d'eau dans le verre est inchangée si le glaçon fond.

► **Poser le problème**

1. On étudie l'équilibre du glaçon à la surface de l'eau. Ce dernier est soumis à son poids ainsi qu'aux poussées d'Archimède exercées par l'eau et l'air. Par définition le volume d'eau déplacé est V_e donc la masse d'eau déplacée vaut $m'_e = \rho_e V_e$. Le volume d'air déplacé, quant à lui, vaut $V_a = V_g - V_e$ donc la masse d'air déplacée est égale à $m'_a = \rho_a(V_g - V_e)$.



► **Mettre en œuvre la loi d'Archimède**

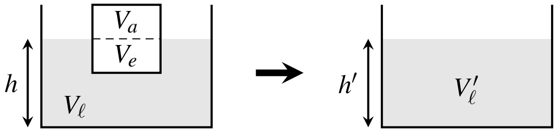
On applique le principe fondamental de la statique au glaçon dans le référentiel lié au verre supposé galiléen : $\vec{P} + \vec{\Pi}_{\text{air}} + \vec{\Pi}_{\text{eau}} = \vec{0}$. On poursuit en appliquant la loi d'Archimède :

$$\rho_g V_g \vec{g} - \rho_a (V_g - V_e)\vec{g} - \rho_e V_e \vec{g} = \vec{0} \iff \rho_g V_g - \rho_a (V_g - V_e) - \rho_e V_e = 0 \iff \boxed{x = \frac{\rho_g - \rho_a}{\rho_e - \rho_a}}$$

L'air est environ mille fois moins dense que l'eau liquide et la glace donc on peut négliger ρ_a dans l'expression obtenue, ce qui revient à négliger la poussée d'Archimède exercée par l'air devant les deux autres forces : $\boxed{x = \rho_g/\rho_e}$.

► **Réaliser un bilan de volume**

2. On note respectivement (h, V_ℓ) et (h', V'_ℓ) la hauteur d'eau et le volume d'eau liquide dans le verre avant et après la fonte du glaçon.



- Dans l'état initial on peut écrire $V_\ell + V_e = hS$, avec S la section du verre.
- Dans l'état final on a de même $V'_\ell = h'S$.
- L'eau est incompressible donc une fois que le glaçon a fondu : $V'_\ell = V_\ell + V_{\text{glaçon fondu}}$.
- La masse du glaçon se conserve lorsqu'il fond : $m_{\text{glaçon}} = \rho_g V_g = \rho_e V_{\text{glaçon fondu}}$.
- D'après la question 1 (en négligeant l'action de l'air) : $\rho_g V_g = \rho_e V_e$.

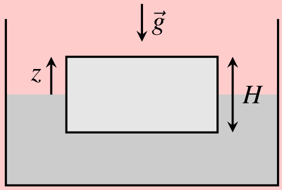
À partir des deux dernières relations on trouve que $V_{\text{galçon fondu}} = V_e$. On en déduit que :

$$hS = V_\ell + V_e = V'_\ell \underbrace{- V_{\text{glaçon fondu}} + V_e}_{=0} = h'S \iff \boxed{h = h'}$$

La hauteur d'eau ne change pas quand le glaçon fond.

Application 5

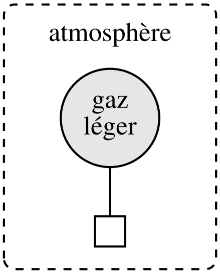
Un cylindre homogène de masse volumique ρ_c, hauteur H et section S flotte à la surface d'un liquide incompressible de masse volumique ρ_ℓ. Il est orienté de sorte que son axe reste vertical à tout instant. On suppose qu'il peut se translater verticalement et on note z la position du sommet du cylindre par rapport à la surface libre. On néglige l'action de l'air.



Établir l'équation du mouvement vérifiée par $z(t)$ si le cylindre reste toujours immergé en partie dans le liquide. Justifier que les déplacements verticaux sont des oscillations harmoniques et exprimer leur période en fonction de ρ_c, ρ_ℓ, g et H.

5.3 Un classique : le ballon atmosphérique

Un ballon atmosphérique, au sens large, est un dispositif constitué d'une enveloppe enfermant un gaz plus léger que l'air, dont l'objectif consiste à s'élever dans l'atmosphère grâce à l'action de la poussée d'Archimède. Suivant les applications ces ballons peuvent contenir de l'air chaud (montgolfière) ou bien un gaz plus léger que l'air comme l'hydrogène ou l'hélium (ballon météorologique, dirigeable). Ils peuvent avoir une enveloppe souple ou rigide, ouverte ou fermée. Ils servent généralement à transporter du matériel et/ou des individus.



⚠ Il faut retenir qu'un ballon est toujours constitué d'une partie solide (enveloppe, matériel, nacelle, passagers, etc) et d'une partie gazeuse (à l'intérieur de l'enveloppe). Ainsi la masse totale du ballon doit être décomposée en deux termes : $m_{\text{ballon}} = m_{\text{solide}} + m_{\text{gaz interne}}$.

Condition de décollage d'un ballon atmosphérique

Un ballon atmosphérique s'envole si, au niveau du sol, **la poussée d'Archimède est plus forte que le poids**. En s'appuyant sur la loi d'Archimède, on peut reformuler cette condition en termes de masses :

$$\text{au sol : } \boxed{\|\vec{\Pi}\| > \|\vec{P}\|} \iff \boxed{m_{\text{air déplacé}} > m_{\text{solide}} + m_{\text{gaz interne}}}$$

Condition de plafonnement d'un ballon atmosphérique

Certains ballons sont faits pour atteindre une certaine altitude et y demeurer, on dit qu'ils *plafonnent*. Un ballon atmosphérique plafonne si, à une certaine altitude, **la poussée d'Archimède est égale au poids**.

$$\text{en } z_{\text{plafond}} : \boxed{\|\vec{\Pi}\| = \|\vec{P}\|} \iff \boxed{m_{\text{air déplacé}} = m_{\text{solide}} + m_{\text{gaz interne}}}$$

Exemple

Un ballon-sonde est assimilé à une sphère indéformable de rayon r remplie d'hélium, ouverte par le bas, ce qui permet à l'hélium de s'échapper au cours de l'ascension et au ballon de demeurer en équilibre thermique et mécanique avec l'atmosphère. Le ballon est conçu pour transporter des équipements scientifiques. L'enveloppe et les équipements ont une masse totale $m_0 = 12\,\mathrm{kg}$. L'atmosphère est isotherme de température $T_0 = 288\,\mathrm{K}$, la pression au niveau du sol vaut $P_0 = 1,0\,\mathrm{bar}$.

Données : Masse molaire de l'air : $M_a = 29,0\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$, masse molaire de l'hélium : $M_H = 4,0\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$, constante des gaz parfaits : $R = 8,31\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$, intensité de la pesanteur : $g = 9,81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

1. Calculer le rayon minimal $r_{\min}$ qui permet au ballon de décoller.

2. Justifier que de l'hélium s'échappe du ballon au cours de l'ascension.

3. On donne $r = 2,0\,\mathrm{m}$. Montrer que le ballon plafonne et calculer à quelle altitude.

► Établir la condition de décollage d'un ballon atmosphérique

1. Le ballon décolle à condition que la poussée d'Archimède soit plus forte que le poids, autrement dit si $m_{\text{air déplacé}} > m_0 + m_{\text{hélium}}$. On exprime les deux masses gazeuses en utilisant la formulation intensive de la loi des gaz parfaits (voir paragraphe 3.2). Le ballon est au sol, en équilibre mécanique et thermique avec l'atmosphère. On en déduit que l'air et l'hélium sont tous deux à la pression P_0 et la température T_0 :

$$m_{\text{air déplacé}} = \rho_a V = \frac{P_0 M_a V}{RT_0} \qquad \text{et} \qquad m_{\text{hélium}} = \rho_H V = \frac{P_0 M_H V}{RT_0}$$

avec $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ le volume du ballon. La condition de décollage devient :

$$\frac{P_0 M_a V}{RT_0} > m_0 + \frac{P_0 M_H V}{RT_0} \iff V > \frac{m_0 R T_0}{P_0(M_a - M_H)}$$

On conclut finalement que : $\boxed{r > r_{\min} = \left(\frac{3 m_0 R T_0}{4\pi P_0 (M_a - M_H)}\right)^{\frac{1}{3}} = 1,40\,\mathrm{m}}$.

► Mettre en œuvre la loi des gaz parfaits

2. Au cours de l'ascension le volume du ballon reste fixe mais la pression diminue. Or à une altitude z quelconque la masse d'hélium interne vaut $m_H = \frac{P(z) M_H V}{RT_0}$. Puisque M_H, V, R, T_0 sont constants et $P(z)$ diminue, on conclut que la masse d'hélium dans le ballon diminue au cours de l'ascension donc **de l'hélium s'échappe à mesure que le ballon s'élève en altitude**.

► Établir la condition de plafonnement d'un ballon atmosphérique

3. Le ballon plafonne à une certaine altitude z à condition que :

$$m_{\text{air déplacé}} = m_0 + m_{\text{hélium}} \iff \frac{P(z) M_a V}{RT_0} = m_0 + \frac{P(z) M_H V}{RT_0} \iff P(z) = \frac{m_0 R T_0}{(M_a - M_H) V}$$

Dans le modèle de l'atmosphère isotherme le champ de pression s'écrit $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{M_a g z}{RT_0}\right)$ (voir paragraphe 3.2 pour la démonstration). On en déduit l'altitude de plafonnement :

$$P_0 \exp\left(-\frac{M_a g z}{RT_0}\right) = \frac{m_0 R T_0}{(M_a - M_H)V} \iff \boxed{z = \frac{RT_0}{M_a g} \ln\left[\frac{P_0 V (M_a - M_H)}{m_0 R T_0}\right] = 9{,}0\,\mathrm{km}}$$

Application 6

On reprend les données de l'exercice précédent mais cette fois-ci l'enveloppe du ballon-sonde est étanche et extensible, si bien que l'hélium ne peut pas s'échapper tandis que le volume peut varier au cours de l'ascension. Le ballon éclate si le volume dépasse $V_m = 10\,\mathrm{m}^3$. On suppose à nouveau que l'hélium est en équilibre mécanique et thermique avec l'atmosphère. Le rayon du ballon vaut $r_0 = 2{,}0\,\mathrm{m}$ au niveau du sol.

1. Calculer l'accélération du ballon au moment du décollage.

2. On appelle *force ascensionnelle* $\vec{F}$ la résultante de la poussée d'Archimède et du poids. Montrer qu'elle reste constante au cours de l'ascension.

3. Calculer l'altitude à laquelle le ballon éclate.