

CHAPITRE 27

Champ magnétique

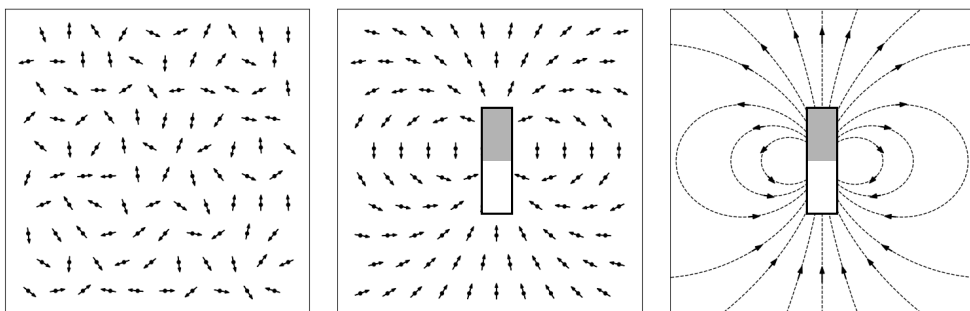
Les champs magnétiques sont au cœur de nombreuses technologies (moteur électrique, alternateur, carte RFID, chargeur sans fil, frein à induction, plaque à induction, boussole, etc). Ces applications reposent sur deux phénomènes liés au champ magnétique : *l'induction* (qui fait l'objet du chapitre 28) et la *force de Laplace*.

Avant toute chose il faut comprendre comment l'on peut générer un champ de direction et d'intensité voulue. Dans un premier temps on s'intéresse donc au lien entre les sources et le champ magnétique produit ; on étudie les propriétés géométriques du champ en s'appuyant sur des cartes et on insiste sur le rôle des symétries. Ensuite on présente la force de Laplace et on en étudie quelques applications.

1 Topographie d'un champ magnétique

1.1 Sources de champ magnétique

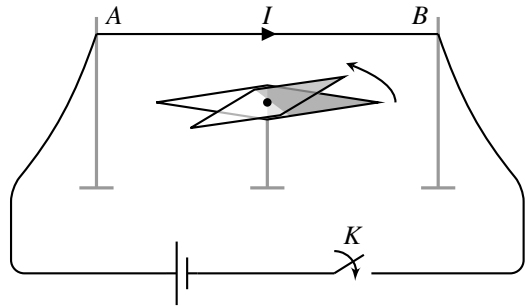
La boussole est l'instrument le plus classique pour détecter la présence d'un champ magnétique. En effet son aiguille s'oriente dans la direction du champ dans lequel elle est plongée. La figure ci-dessous illustre une expérience très commune qui montre qu'un aimant produit un champ magnétique. En plaçant un aimant à proximité d'aiguilles aimantées, on observe que celles-ci prennent une orientation particulière. Une structure géométrique du champ apparaît, qui semble être constituée de lignes directrices, appelées *lignes de champ magnétique*.



À gauche : assemblée d'aiguilles aimantées orientées aléatoirement en l'absence de champ. Au centre : un aimant influence l'orientation des aiguilles. À droite : les directions des aiguilles suivent des lignes imaginaires appelées "lignes de champ magnétique".

On peut ainsi décrire la structure géométrique d'un champ magnétique à l'aide d'une **carte de champ**, c'est-à-dire une figure qui représente l'allure des lignes de champ produites par une source. On verra plus loin l'allure des cartes de champ de différentes sources usuelles.

Une expérience historique, réalisée par le danois Ørsted en 1820, montre qu'un courant électrique génère également un champ magnétique. Une aiguille aimantée montée sur pivot peut tourner dans un plan horizontal. Elle est placée sous un fil conducteur AB rectiligne. En l'absence de courant (interrupteur K ouvert) l'aiguille s'oriente dans la direction du champ magnétique terrestre (on place le fil AB parallèlement à cette direction). Quand un courant circule l'aiguille pivote vers une nouvelle position d'équilibre. Cette expérience est connue pour être la première à mettre en évidence un lien entre électricité et magnétisme.



Expérience d'Ørsted : une aiguille aimantée pivote lorsqu'on la place près d'un fil parcouru par un courant électrique. On conclut qu'un courant électrique génère un champ magnétique.

Sources de champ magnétique

Les **aimants permanents** et les **courants électriques** sont les deux types de sources de champ magnétique que l'on abordera dans ce chapitre.

Remarque : Vous verrez en deuxième année, avec les *équations de Maxwell* décrivant les phénomènes électromagnétiques, qu'on peut également générer un champ magnétique à l'aide d'un champ électrique variable dans le temps.

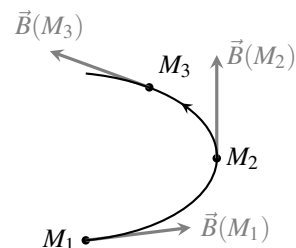
1.2 Carte de champ magnétique

Ligne de champ magnétique

Une ligne de champ magnétique est une courbe orientée en tout point par le champ magnétique local.

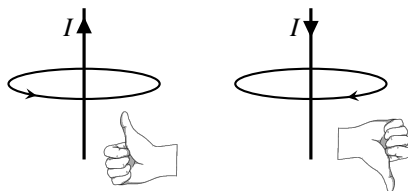
Propriété 1 : Direction du champ

Par définition en tout point M appartenant à une ligne de champ, le vecteur $\vec{B}(M)$ est **tangent à la ligne** et orienté dans le sens de la ligne (indiquée par une flèche, voir figure ci-contre).

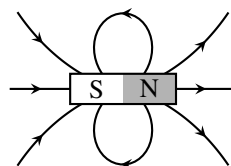


Propriété 2 : Lignes de champ créées par des courants électriques

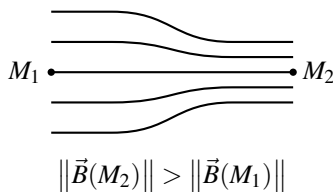
Sauf exceptions les lignes de champ créées par des fils électriques sont des **courbes fermées qui s'enroulent autour des fils**. Le lien entre le sens du courant et le sens des lignes de champ est donnée par la **règle de la main droite**.

**Propriété 3 : Lignes de champ créées par un aimant permanent**

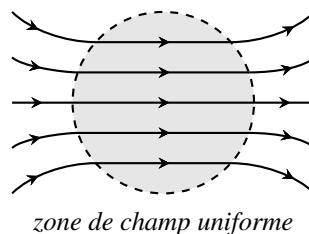
Sauf exceptions les lignes de champ créées par un aimant permanent partent du pôle nord et se dirigent vers le pôle sud.

**Propriété 4 : Intensité du champ**

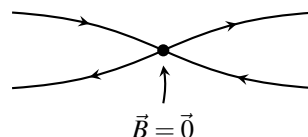
Quand on se déplace le long d'une ligne de champ ($\mathcal{C}$), l'intensité du champ magnétique augmente si les lignes de champ situées de part et d'autre de ($\mathcal{C}$) se resserrent. Inversement l'intensité du champ diminue si les lignes de champ s'écartent.

**Propriété 5 : Champ uniforme**

Un champ magnétique est uniforme dans une zone de l'espace si et seulement si les lignes de champs sont **rectilignes et parallèles entre elles**.

**Propriété 6 : Champ nul**

Le champ magnétique est nul en un point où **plusieurs lignes de champ se rejoignent**.

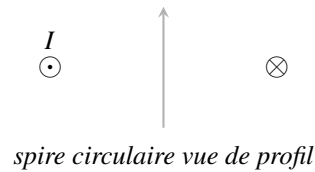
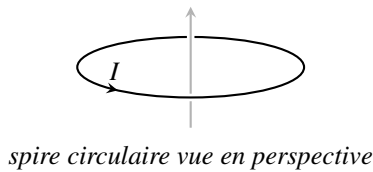


1.3 Champ créé par une ou plusieurs spires circulaires coaxiales

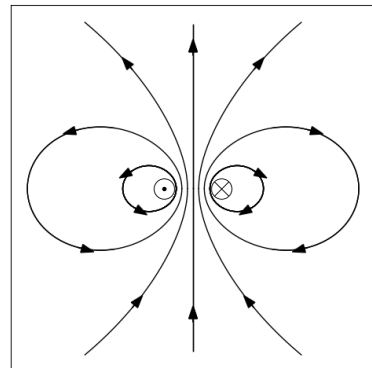
1.3.1 Spire circulaire

Spire de courant

Une spire est une boucle de courant fermée sur elle-même. On peut la représenter en perspective ou bien de profil. Dans ce dernier cas on utilise les symboles usuels pour indiquer si le courant est entrant ou sortant du plan de la figure.



La carte de champ ci-contre est tracée dans un plan contenant l'axe de la spire. On remarque qu'elle présente des similarités avec celle d'un aimant droit, notamment à grande distance.



Champ dipolaire

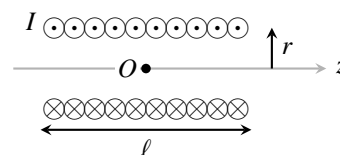
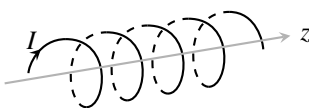
À grande distance les champs magnétiques créés par une spire et un aimant permanent sont similaires, on parle de *champ dipolaire*.

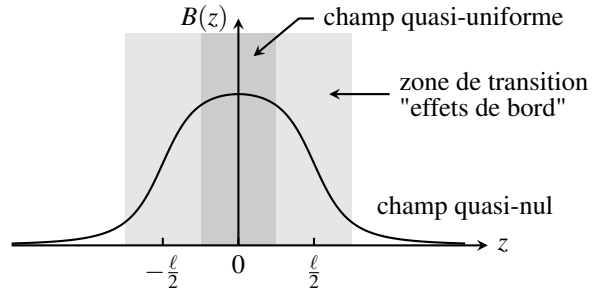
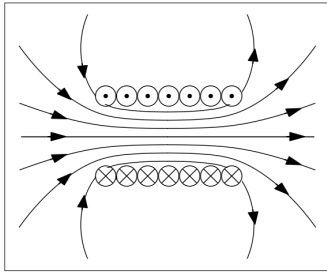
Remarque : Le terme “dipolaire” indique que la source est constituée de deux pôles magnétiques. On verra plus loin qu'en effet, comme pour les aimants permanents, il est possible d'attribuer à une spire un pôle nord et un pôle sud.

1.3.2 Solénoïde

Solénoïde

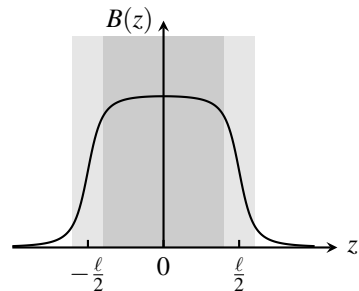
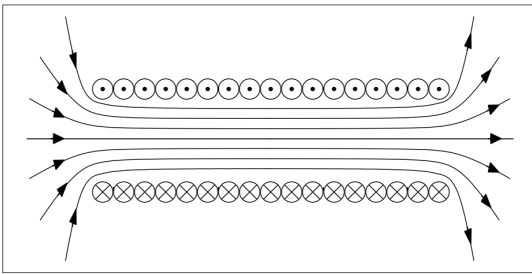
Un solénoïde est une bobine de forme cylindrique (rayon r , longueur ℓ). D'un point de vue pratique on l'assimile à un ensemble de N spires coaxiales.





Champ créé par un solénoïde “court” ($\ell/r = 2$)

Le champ créé par un solénoïde a la particularité d’être quasi-uniforme dans son volume intérieur et quasi-nul à l’extérieur. Il y a une zone de transition, près des bords ($z = \pm\ell/2$), dans laquelle l’intensité du champ varie rapidement (on parle d’effets de bords). On note $\vec{B} = B(z)\vec{u}_z$ le champ en un point de l’axe et on représente les variations de $z \mapsto B(z)$ sur la figure ci-dessus, à droite.



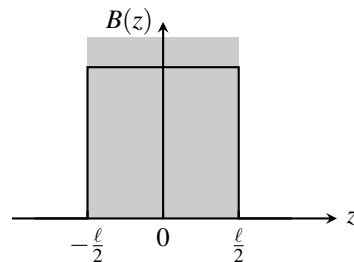
Champ créé par un solénoïde “long” ($\ell/r = 10$)

À rayon r fixé, plus le solénoïde est long et plus la taille de la zone de transition tend à être négligeable comparée à la zone intérieure de champ quasi-uniforme.

Modèle du solénoïde long

Quand un solénoïde est de très grande longueur comparée à son rayon (typiquement $\ell/r \gtrsim 10$), on adopte le modèle simplifié qui consiste à **négliger les effets de bords**, c’est-à-dire considérer que le champ est :

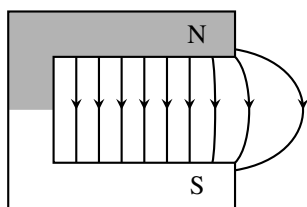
- uniforme dans tout le volume intérieur,
- nul à l’extérieur.



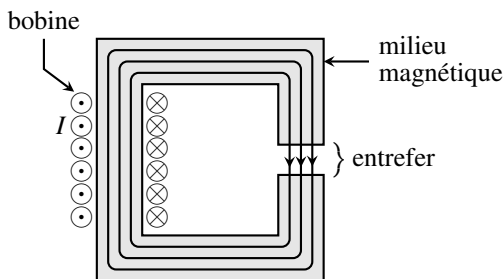
champ approché dans le modèle du solénoïde long

1.4 Sources de champ uniforme

Il existe d'autres dispositifs que le solénoïde pour produire un champ magnétique uniforme. On peut notamment citer les systèmes à *entrefer* tels que l'aimant en U ou l'**électroaimant**.



Champ créé par un aimant en U



Champ créé par un électroaimant

Électroaimant

Un électroaimant est un aimant que l'on active grâce à un courant électrique. Il est constitué d'un fil conducteur enroulé autour d'un milieu magnétique (voir figure ci-dessus, à droite). Lorsqu'un courant circule dans la bobine, le milieu magnétique s'aimante et, comme pour l'aimant en U, un champ apparaît dans l'entrefer.

Lignes de champ dans un milieu magnétique

Quand on observe l'allure des lignes de champ d'un électroaimant on constate qu'au lieu de diverger à l'extérieur de la bobine, celles-ci sont guidées à l'intérieur du milieu magnétique ; on dit qu'un milieu magnétique **canalise les lignes de champ**.

Remarque : Les aimants permanents sont fabriqués avec des milieux dits *ferromagnétiques durs* et ont, par définition, une aimantation permanente. Le matériau d'un électroaimant est *ferromagnétique doux* ; il perd son aimantation lorsque l'on éteint le courant. L'étude des milieux magnétiques est au programme de deuxième année en filière PSI.

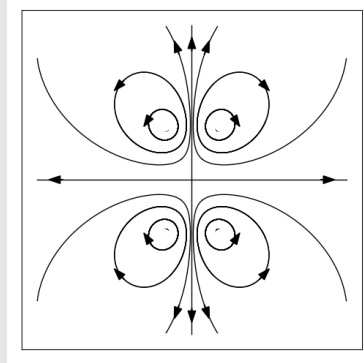
1.5 Exemples et ordres de grandeur

- Les appareils d'IRM utilisent un solénoïde qui crée un champ statique de l'ordre de quelques teslas.
- Le champ magnétique terrestre est un champ dipolaire statique. Son intensité à la surface de la Terre est de l'ordre de quelques dizaines de microtesla (en France il est d'environ $50\mu\text{T}$).
- Un aimant droit usuel crée un champ statique et de l'ordre de 0,1 T à 1 T à quelques mm de sa surface.

1.6 Applications

Exemple

La carte de champ ci-contre est produite par des courants électriques. Analyser-la en situant les sources (indiquer le sens du courant) et en identifiant des zones de champ fort, faible, uniforme ou nul.



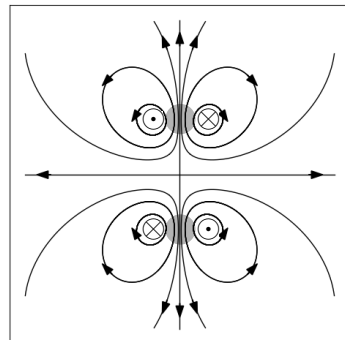
► Analyser une carte de champ magnétique

Les courants sont situés au centre des lignes de champ, on détermine leur sens avec la règle de la main droite.

Le champ est fort dans les zones grisées, là où les lignes de champ se resserrent. À l'inverse le champ est faible à proximité du centre de la figure car les lignes de champ s'écartent rapidement.

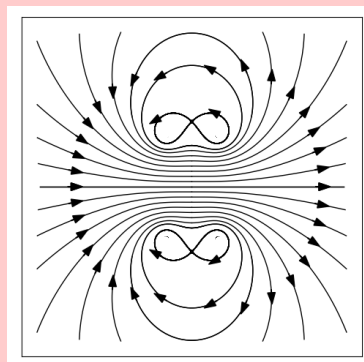
Le champ est même nul au centre de la figure car quatre lignes de champ s'y rejoignent.

On ne distingue pas de zone de champ uniforme.



Application 1

Mêmes questions avec cette autre carte de champ.



2 Symétries et invariances d'une distribution de courants

2.1 Principe de Curie

Principe de Curie

Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets.

Ce principe général énoncé par Pierre Curie indique qu'en cherchant des propriétés de symétrie d'une source de champ magnétique (on se limite ici à des courants électriques) on peut obtenir des informations sur la géométrie du champ produit.

2.2 Invariance

Invariance d'une distribution de courants

Une invariance pour une distribution de courants ($\mathcal{D}$) est une transformation de l'espace qui aboutit à une distribution identique à ($\mathcal{D}$).

La recherche d'invariances permet :

- **de choisir un système de coordonnées adapté** pour exprimer le champ $\vec{B}$ produit par cette distribution,
- **de réduire au strict minimum le nombre de coordonnées de position** dont $\vec{B}$ dépend explicitement.

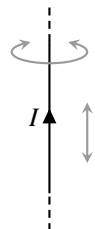
Exemple

On étudie le champ magnétique produit par un fil rectiligne de longueur infinie parcouru par un courant continu. Identifier les invariances.

► Schéma + étude des invariances

On représente schématiquement la situation sur la figure ci-contre. Le fil est inchangé si on le fait tourner sur lui-même (invariance par **rotation**). De même, puisque le fil est supposé de longueur infinie, il est inchangé si on le translate dans sa direction (invariance par **translation**).

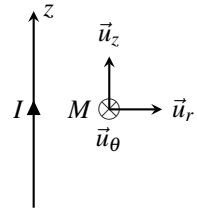
Ces deux invariances (translation le long du fil et rotation autour du fil) nous amènent à la conclusion que le système de coordonnées **cylindriques** est le plus adapté pour exprimer le champ magnétique créé.



► Expression du champ magnétique

Compte tenu du système de coordonnées choisi l'expression la plus générale du champ magnétique est de la forme :

$$\vec{B}(M) = \begin{pmatrix} B_r(r, \theta, z) \\ B_\theta(r, \theta, z) \\ B_z(r, \theta, z) \end{pmatrix}$$



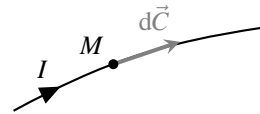
avec B_r , B_θ et B_z les trois coordonnées du champ dans la base cylindrique, qui dépendent chacune *a priori* des trois coordonnées de position du point M .

Il y a invariance par rotation d'angle θ et par translation selon z . Le principe de Curie indique que **le champ magnétique ne dépend explicitement ni de θ , ni de z** (il est donc de la forme $\vec{B}(M) = B_r(r)\vec{u}_r + B_\theta(r)\vec{u}_\theta + B_z(r)\vec{u}_z$).

2.3 Symétrie

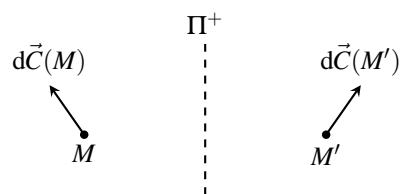
Vecteur élément de courant

Soit M un point appartenant à un fil parcouru par un courant d'intensité I et $d\vec{\ell}$ un déplacement élémentaire le long du fil, orienté dans le sens du courant, en M . On appelle *élément de courant* au point M le vecteur $d\vec{C} = I d\vec{\ell}$.



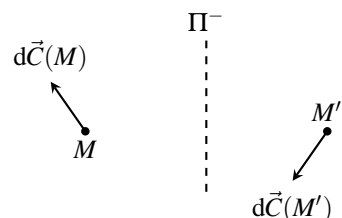
Plan de symétrie d'une distribution de courants

Un plan de symétrie pour une distribution de courants (noté (Π^+)) est tel qu'en deux points M et M' symétriques par rapport à (Π^+) on trouve des éléments de courants eux-mêmes symétriques l'un de l'autre : $d\vec{C}(M') = \text{sym}_{(\Pi^+)} [d\vec{C}(M)]$.

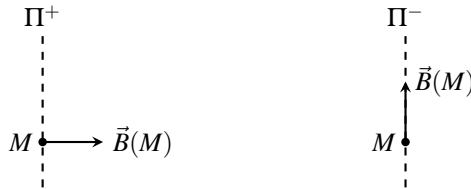


Plan d'antisymétrie d'une distribution de courants

Un plan d'antisymétrie pour une distribution de courants (noté (Π^-)) est tel qu'en deux points M et M' symétriques par rapport à (Π^-) on trouve des éléments de courants antisymétriques l'un de l'autre (c'est-à-dire **opposés** de leurs symétriques respectifs) : $d\vec{C}(M') = -\text{sym}_{(\Pi^-)} [d\vec{C}(M)]$.



Symétries et direction du champ magnétique



En tout point M appartenant à plan de symétrie $\vec{B}(M)$ est **orthogonal** à (Π^+) .

En tout point M appartenant à plan d'antisymétrie $\vec{B}(M)$ est **inclus dans** (Π^-) .

La recherche des symétries d'une distribution de courants permet d'obtenir des informations sur **la direction du champ magnétique produit**.

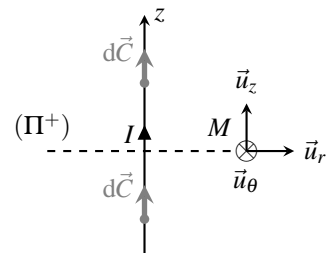
Exemple

Déterminer l'allure des lignes de champ magnétique produites par un fil rectiligne de longueur infinie parcouru par un courant continu.

► Étude des symétries

On souhaite obtenir des informations sur le champ magnétique créé en un point M quelconque de l'espace. On a vu avec l'étude des invariances que le repère cylindrique est le plus adapté.

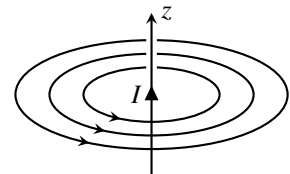
Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan d'antisymétrie (voir figure ci-contre) ; $\vec{B}(M)$ est inclus dans ce plan donc **le champ magnétique n'a pas de composante selon $\vec{u}_z$** ($B_z = 0$).



Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ qui contient le fil est un plan de symétrie ; $\vec{B}(M)$ est orthogonal à ce plan donc **le champ magnétique est dirigé selon $\vec{u}_\theta$** ($B_r = 0$ et $B_z = 0$).

L'étude des symétries et des invariances nous amène à la conclusion que le champ magnétique créé par un fil rectiligne infini est de la forme $\vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{u}_\theta$; il est **orthoradial**.

Les lignes de champ étant orientées en tout point par le champ magnétique, on en déduit qu'elles ont nécessairement la forme de **cercles centrés sur le fil**.



Remarque : Le plan de symétrie $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ suffit à lui seul pour conclure (le plan d'antisymétrie $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est redondant pour éliminer la composante B_z). On retient que, si c'est possible, il est préférable de chercher un plans de symétrie des courants car celui-ci permet d'éliminer d'un seul coup **deux composantes du champ magnétique**.

Bilan

L'étude des invariances d'une distribution de courants permet de réduire le nombre de coordonnées de position dont dépend le champ magnétique.

L'étude des symétries d'une distribution de courants permet de réduire le nombre de coordonnées du champ magnétique.

$$\vec{B}(M) = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} \cancel{B_r(r, \theta, z)} \\ B_\theta(r, \theta, z) \\ \cancel{B_z(r, \theta, z)} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{symétries} \\ \\ \text{invariances} \end{array} \end{array}$$

Application 2

Simplifier autant que possible l'expression du champ magnétique produit par un solénoïde de longueur ℓ infinie, en analysant les symétries et les invariances. En déduire l'allure des lignes de champ à l'intérieur du solénoïde (on admet que le champ est nul à l'extérieur).

3 Influence de l'intensité du courant

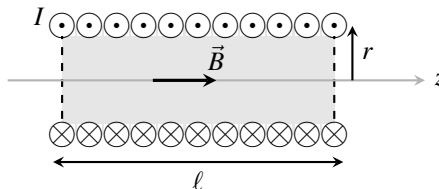
Il existe des méthodes pour calculer le champ magnétique créé par des courants, mais elles sont au programme de deuxième année. Pour l'instant on admet ces expressions et l'on s'en sert pour faire le lien entre le champ produit et l'intensité du courant.

3.1 Solénoïde long

Champ créé par un solénoïde long

Le champ magnétique créé par un solénoïde de rayon r et longueur $\ell \gg r$, constitué de N spires parcourues par un courant continu d'intensité I , a pour expression :

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 \frac{N}{\ell} I \vec{u}_z & \text{à l'intérieur} \\ \vec{0} & \text{à l'extérieur} \end{cases}$$



avec $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ une constante fondamentale appelée *perméabilité du vide*.

Remarque : On note parfois $n = \frac{N}{\ell}$ la *densité linéique de spires* (en m^{-1}), qui mesure le nombre de spires que l'on compte par unité de longueur de solénoïde.

Exemple

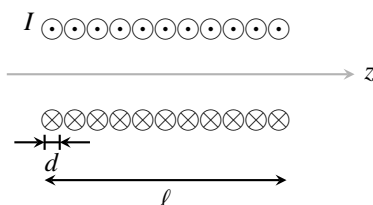
Un solénoïde de rayon $r = 3 \text{ cm}$ est constitué de $N = 600$ spires jointives de diamètre $d = 0,8 \text{ mm}$, parcourues par un courant $I = 1,0 \text{ A}$.

1. Le modèle du solénoïde long est-il valable ? Justifier.
2. Calculer le champ produit à l'intérieur du solénoïde.
3. On peut renforcer le champ en enroulant plusieurs couches de fils les unes sur les autres, séparées par des feuilles de papier isolantes. Calculer le nombre minimal de couches pour produire un champ de 20 mT sans que l'intensité dépasse $5,0 \text{ A}$.

► Modèle du solénoïde long

Les spires sont jointives donc la longueur du solénoïde vaut $\ell = Nd = 48 \text{ cm}$. On trouve que $\frac{\ell}{r} = 16 > 10$.

Le modèle du solénoïde long est valable.

**► Calcul du champ**

Le champ à l'intérieur du solénoïde vaut $\|\vec{B}\| = \mu_0 \frac{N}{\ell} I = 1,6 \text{ mT}$.

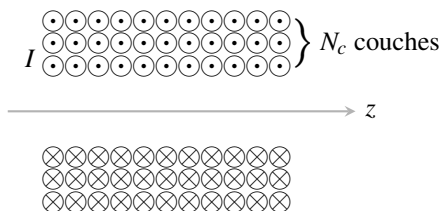
► Exploiter l'additivité du champ magnétique**Additivité du champ magnétique**

Les champs magnétiques créés par différentes sources s'additionnent. Par exemple si une source 1 crée en un point M le champ magnétique $\vec{B}_1(M)$ et une source 2 le champ $\vec{B}_2(M)$ alors la superposition des deux sources crée le champ résultant :

$$\vec{B}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M)$$

Lorsqu'un solénoïde est constitué de plusieurs couches de fils superposées, le champ résultant est égal à la somme des champs créés par chaque couche. Dans le cas présent toutes les couches sont identiques (N spires, longueur ℓ), donc le champ créé à l'intérieur du solénoïde vaut :

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{N_c N}{\ell} I \vec{u}_z$$



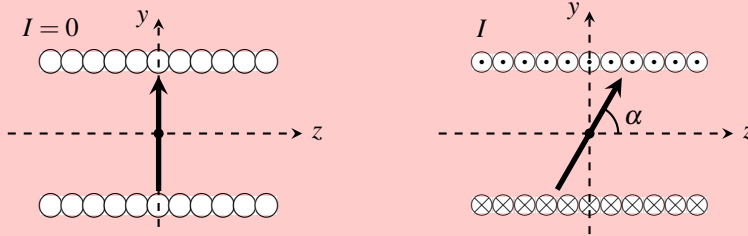
avec N_c le nombre de couches. En supposant que l'intensité est maximale ($I = 5 \text{ A}$), le nombre de couches qui permet d'obtenir un champ $B = 20 \text{ mT}$ vaut :

$$N_c = \frac{B\ell}{\mu_0 N I} = 2,5$$

Il faut au minimum **3 couches de fils**.

Remarque : En toute rigueur l'additivité du champ magnétique n'est valable qu'à condition que le milieu soit *linéaire*. On ne s'attarde pas sur cette propriété et on admet que tous les milieux étudiés dans ce chapitre sont linéaires.

Application 3



On place une aiguille aimantée montée sur pivot à l'intérieur d'un solénoïde de rayon $r = 3\text{ cm}$, longueur $\ell = 80\text{ cm}$ comportant 1200 spires. En l'absence de courant l'aiguille s'oriente dans la direction (Oy) du champ magnétique terrestre $\vec{B}_t$. L'axe du solénoïde est placé perpendiculairement à cette direction.

Lorsqu'on impose un courant dans le solénoïde l'aiguille se place dans une nouvelle position d'équilibre faisant un angle α avec l'axe du solénoïde (Oz) .

1. Exprimer le champ magnétique $\vec{B}_s$ produit par le solénoïde au niveau de l'aiguille.
2. Établir une relation entre α , $\|\vec{B}_t\|$ et $\|\vec{B}_s\|$.
3. On donne $I = 8,0\text{ mA}$ et $\alpha = 14^\circ$. Calculer $\|\vec{B}_t\|$.

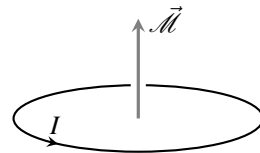
3.2 Champ dipolaire, moment magnétique

Moment magnétique d'une spire plane

Le moment magnétique d'une spire plane est défini par :

$$\vec{\mathcal{M}} = IS\vec{n}$$

avec I l'intensité du courant dans la spire, S l'aire de la spire et $\vec{n}$ un vecteur unitaire orthogonal à la spire, orienté en fonction du sens de I avec la règle de la main droite. Il s'exprime en $\text{A} \cdot \text{m}^2$.



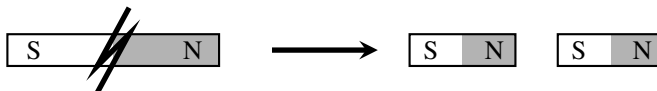
Un moment magnétique permet de mesurer l'intensité du champ créé par un **dipôle magnétique**, c'est-à-dire un système auquel on peut associer un pôle nord et un pôle sud magnétique (voir 1.3 pour l'allure du champ dipolaire). On admet que les aimants permanent possèdent eux-aussi un moment magnétique, même si leur origine est différente de la circulation d'un courant électrique. Les aimants permanents usuels ont un moment magnétique $\mathcal{M} \sim 1 - 10 \text{ A} \cdot \text{m}^2$.

Pôle nord et pôle sud magnétique

Par convention le moment magnétique d'un dipôle indique la direction du **pôle nord magnétique**.



Remarque : Si l'on brise un aimant en deux, chaque morceau reste aimanté donc possède ses propres pôles nord et sud.

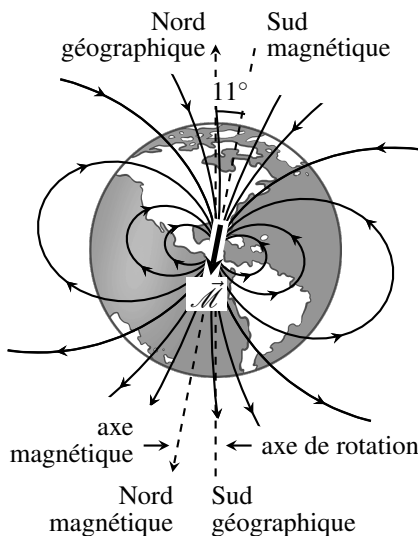


Remarque : Le champ magnétique créé en un point P quelconque par un dipôle de moment magnétique $\vec{M}$ placé à l'origine O d'un repère vaut :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{r}(\vec{M} \cdot \vec{r}) - r^2 \vec{M}}{r^5} \quad \text{avec} \quad \vec{r} = \overrightarrow{OP} \text{ et } r = \|\vec{r}\|$$

Le champ magnétique terrestre (ou *champ géomagnétique*) est dipolaire. Actuellement l'axe magnétique est presque aligné avec l'axe de rotation de la Terre (qui indique les pôles géographiques) et de sens inverse. Le moment magnétique de la Terre est d'environ $8 \cdot 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$.

En un point de la surface terrestre le champ géomagnétique est incliné vers le sol dans l'hémisphère nord et vers le ciel dans l'hémisphère sud. Les boussoles à pivot vertical utilisées pour la navigation s'orientent sur la composante du champ géomagnétique qui est tangente à la surface terrestre. Comme les lignes de champ rejoignent le pôle sud magnétique, les boussoles indiquent approximativement la direction du nord géographique.



Application 4

Calculer le moment magnétique d'une bobine de rayon $r = 5 \text{ cm}$ possédant $N = 600$ spires parcourues par un courant $I = 2,0 \text{ A}$. Comparer à celui d'un aimant usuel.

4 Actions de Laplace exercées par un champ magnétique

4.1 Force de Laplace sur un fil conducteur

Force de Laplace élémentaire

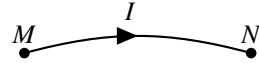
Un élément de courant $d\vec{C}$ plongé dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}$ est soumis à la force :

$$d\vec{F}_{\text{lap}} = d\vec{C} \wedge \vec{B}$$

La force résultante sur une portion macroscopique MN de fil vaut : $\vec{F}_{\text{lap}} = \int_M^N d\vec{C} \wedge \vec{B}$.



Par définition de $d\vec{C}$ le déplacement de M vers N doit se faire **dans le sens arbitraire choisi pour le courant**.



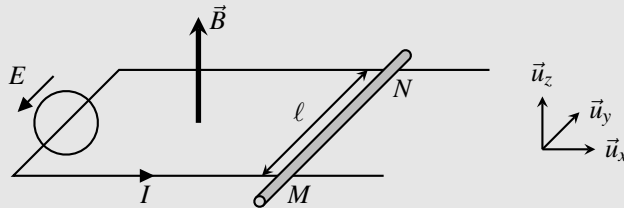
Cas où l'intensité et le champ sont uniformes

Dans le cas particulier où l'intensité I et le champ magnétique $\vec{B}$ sont identiques en tout point du fil entre M et N , on obtient l'expression suivante :

$$\vec{F}_{\text{lap}} = \int_M^N I d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = I \left(\int_M^N d\vec{\ell} \right) \wedge \vec{B} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_{\text{lap}} = I \overrightarrow{MN} \wedge \vec{B}}$$

4.2 Application : Montage des rails de Laplace

Exemple



Une tige métallique mobile est posée sur deux rails conducteurs horizontaux et parallèles, distants de ℓ . On note M et N les points de contact entre la tige et les rails. Un générateur impose un courant continu d'intensité I dans le circuit. L'ensemble du montage est plongé dans un champ magnétique extérieur stationnaire et uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$.

Exprimer la force de Laplace qui s'exerce sur la tige. Justifier qu'en l'absence de tout frottement celle-ci glisse le long des rails quand on allume le générateur.

► Calculer une force de Laplace

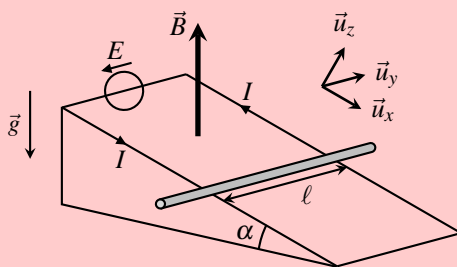
La tige mobile est parcourue par un courant I et plongée dans un champ magnétique uniforme. La force de Laplace qui s'exerce sur elle vaut :

$$\vec{F}_{\text{lap}} = I \overrightarrow{MN} \wedge \vec{B} = I \ell \vec{u}_y \wedge B \vec{u}_z \implies \boxed{\vec{F}_{\text{lap}} = IB \ell \vec{u}_x}$$

La force de Laplace est colinéaire aux rails. En l'absence de frottements cette force, qui apparaît si un courant circule, met la tige en mouvement le long des rails.

Application 5

On considère le dispositif des rails de Laplace distants de $\ell = 10\text{ cm}$, posés sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 20^\circ$ par rapport à l'horizontale. On place une tige conductrice de masse m sur les rails. Le champ magnétique extérieur est uniforme, dirigé selon la verticale ascendante, de norme $B = 1,3\text{ T}$. Le circuit est alimenté par un générateur qui impose un courant I stationnaire. Le champ de pesanteur vaut $g = 9,8\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



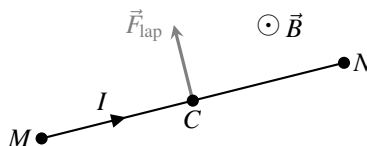
1. Exprimer la force de Laplace qui s'exerce sur la tige dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Quel doit être le signe de I pour que la tige puisse demeurer en équilibre ?
2. La tige est en équilibre si l'on impose un courant $|I| = 0,82\text{ A}$. Calculer m .

4.3 Moment de la force de Laplace

Dans certaines situations la force de Laplace est utilisée pour mettre un circuit en rotation autour d'un axe. Il est alors utile d'exprimer le moment des actions de Laplace.

Point d'application de la force de Laplace

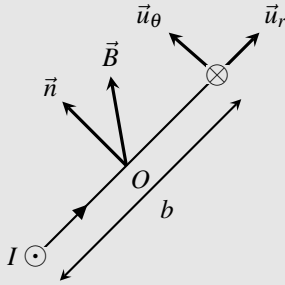
Lorsqu'une portion **rectiligne** de fil conducteur MN , parcouru par un courant d'intensité I , est plongée dans un champ magnétique extérieur **uniforme** $\vec{B}$, la force de Laplace résultante s'applique **au centre du segment** $[MN]$.



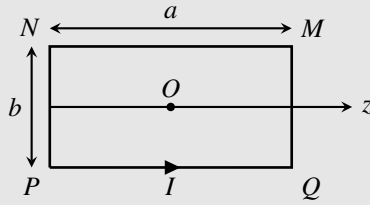
Remarque : Lorsqu'un circuit est constitué de plusieurs portions rectilignes (voir exemple suivant), on calcule le moment des actions de Laplace séparément sur chaque portion rectiligne.

Exemple

On considère une spire plane rectangulaire $MNPQ$ de côtés a et b , parcourue par un courant I . Elle peut tourner autour de l'axe (Oz) et est placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$. On note $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à la spire (voir figure ci-dessous).



Vue de dessus



Vue dans le plan de la spire

On pose $\vec{B} = B_r \vec{u}_r + B_\theta \vec{u}_\theta$ avec la base locale définie sur la vue de dessus.

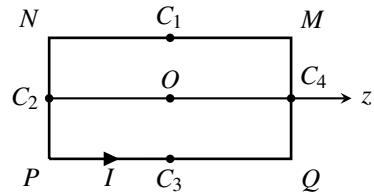
1. Montrer que la force de Laplace résultante sur la spire est nulle.
2. Exprimer le moment résultant Γ_{lap} des forces de Laplace qui s'exercent sur la spire, par rapport à l'axe (Oz) .
3. Vérifier que $\Gamma_{\text{lap}} = (\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_z$ avec $\vec{\mathcal{M}}$ le moment magnétique de la spire.

► Calculer une force de Laplace

1. On considère le circuit $M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow M$ pour calculer la force de Laplace résultante sur la spire. Le champ magnétique est uniforme donc $\vec{F}_{\text{lap}} = \int_M^M I d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = I \overrightarrow{MM} \wedge \vec{B} = \vec{0}$.

► Calculer un moment des actions de Laplace

2. On décompose le circuit en quatre segments dont on note les centres C_1, C_2, C_3 et C_4 (voir ci-contre). On calcule le moment des actions de Laplace sur chaque segment.



Segment NP : La force de Laplace résultante $\vec{F}_{NP}$ sur ce segment s'applique en C_2 qui appartient à l'axe (Oz) . Le bras de levier est nul donc $\mathcal{M}_z(\vec{F}_{NP}) = 0$. Le raisonnement est identique pour le segment QM : $\mathcal{M}_z(\vec{F}_{QM}) = 0$.

Segment MN : On calcule la force de Laplace :

$$\vec{F}_{MN} = I \overrightarrow{MN} \wedge \vec{B} = I(-a\vec{u}_z) \wedge (B_r \vec{u}_r + B_\theta \vec{u}_\theta) = aI(B_\theta \vec{u}_r - B_r \vec{u}_\theta)$$

On calcule ensuite le moment par rapport à l'axe (Oz) :

$$\mathcal{M}_z(\vec{F}_{MN}) = (\overrightarrow{OC_1} \wedge \vec{F}_{MN}) \cdot \vec{u}_z = \left[\frac{b}{2} \vec{u}_r \wedge aI(B_\theta \vec{u}_r - B_r \vec{u}_\theta) \right] \cdot \vec{u}_z = -\frac{1}{2} abIB_r$$

Un calcul similaire sur le segment PQ donne : $\mathcal{M}_z(\vec{F}_{PQ}) = -\frac{1}{2} abIB_r$.

On conclut que $\Gamma_{\text{lap}} = -abIB_r$.

3. On remarque que le vecteur normal à la spire est tel que $\vec{n} = \vec{u}_\theta$.

$$(\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_z = [Iab\vec{u}_\theta \wedge (B_r \vec{u}_r + B_\theta \vec{u}_\theta)] \cdot \vec{u}_z = -IabB_r = \Gamma_{\text{lap}}$$

On retrouve bien l'expression obtenue à la question précédente.

Application 6

On modélise de façon très simplifiée le moteur d'un système d'assistance électrique de vélo.

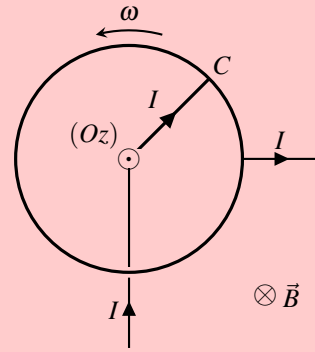
Une barre OC de longueur a et solidaire du pédalier tourne autour de l'axe vertical $\Delta = (Oz)$, son extrémité C s'appuyant sur un cercle conducteur horizontal de centre O et de rayon $a = 1,0\text{m}$, et admettant l'axe Δ comme axe de symétrie orthogonal au cercle. La barre et le cercle sont des conducteurs électriques.

Le circuit est alimenté avec un courant d'intensité constante $I = 3,0\text{A}$.

L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme, constant et vertical $\vec{B} = -B\vec{u}_z$ avec $B = 1,0\text{T}$.

On suppose que le pédalier tourne à vitesse angulaire constante. Son vecteur rotation est $\vec{\Omega} = \omega\vec{u}_z$ avec $\omega = 100\text{ tours/min}$.

Calculer le moment par rapport à Δ puis la puissance des actions de Laplace qui s'exercent sur la barre en rotation.

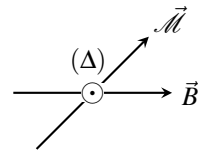


4.4 Couple sur un moment magnétique

Action d'un champ magnétique sur un dipôle

Un dipôle de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ plongé dans un champ extérieur $\vec{B}$ est soumis au couple vectoriel :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$



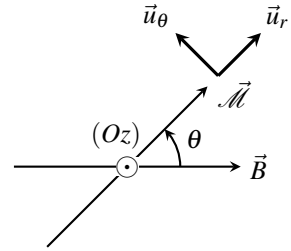
Si le dipôle peut pivoter autour d'un axe (Δ) orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ alors le couple scalaire par rapport à cet axe est $\Gamma_\Delta = (\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_\Delta$.

Exemple

Une aiguille aimantée de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ peut pivoter sans frottement autour d'un axe vertical. On note J son moment d'inertie. Elle est plongée dans un champ magnétique uniforme et horizontal $\vec{B}$. Déterminer la période des petites oscillations de l'aiguille.

► **Introduire les notations utiles**

1. On représente schématiquement la situation. On se place dans un repère cylindrique centré sur la liaison pivot, l'angle θ mesure la direction de l'aiguille par rapport à celle du champ magnétique.

► **Mettre en œuvre le théorème du moment cinétique**

L'aiguille est soumise à son poids $\vec{P}$, à la réaction du pivot $\vec{R}$ et au couple magnétique $\vec{\Gamma}$. On applique le théorème du moment cinétique par rapport à (Oz) dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$J\ddot{\theta} = \mathcal{M}_z(\vec{P}) + \mathcal{M}_z(\vec{R}) + \vec{\Gamma} \cdot \vec{u}_z$$

Le poids et la réaction du pivot s'appliquent en O donc leur bras de levier est nul : $\mathcal{M}_z(\vec{P}) = \mathcal{M}_z(\vec{R}) = 0$. On exprime le couple magnétique :

$$\vec{\Gamma} \cdot \vec{u}_z = [\mathcal{M} \vec{u}_r \wedge B(\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta)] \cdot \vec{u}_z = -\mathcal{M}B \sin \theta$$

avec $\mathcal{M} = \|\vec{\mathcal{M}}\|$ et $B = \|\vec{B}\|$. On obtient ainsi l'équation du mouvement : $J\ddot{\theta} = -\mathcal{M}B \sin \theta$, que l'on linéarise pour les petites oscillations : $\ddot{\theta} + \frac{MB}{J} \theta = 0$.

L'aiguille effectue des oscillations harmoniques de période $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}B}}$.

Application 7

Un aimant très fin, de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ et de masse m , repose en équilibre au sommet O d'une pointe. Il est soumis à un champ uniforme vertical $\vec{B}$ et à la gravité.

Évaluer la distance $d = OG$, où G est le centre d'inertie de l'aimant, pour que celui-ci reste en équilibre vertical.

