

Devoir n°2 (non surveillé)

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul. Calculer

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j)^2.$$

On essaiera de factoriser le plus possible le résultat.

EXERCICE 2

- 1) Soient $n, q \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq q$. En raisonnant par récurrence sur n , montrer que $\sum_{k=q}^n \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}$.
- 2) En prenant $q = 1$, $q = 2$ puis $q = 3$, en déduire les valeurs de $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=2}^n k(k-1)$, $\sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2)$.

EXERCICE 3

On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_n = \frac{\binom{4n}{n}}{\binom{4n}{2n}}$ et $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

- 1) Calculer u_0 , u_1 et u_2 , puis S_0 , S_1 et S_2 .

- 2) a) Vérifier que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4(2n+1)^2}{3(3n+1)(3n+2)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- b) On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{(2x+1)^2}{(3x+1)(3x+2)}$.

- (i) Vérifier que $f'(x) = -\frac{2x+1}{(3x+1)^2(3x+2)^2}$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

- (ii) Dresser le tableau de variation de f en indiquant la valeur de f en 0 et sa limite en $+\infty$.

- c) Déduire du tableau précédent que $\frac{16}{27} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{2}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- d) En déduire que $\left(\frac{16}{27}\right)^n \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- e) Montrer enfin que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- 3) a) Étudier la monotonie de la suite (S_n) .

- b) En utilisant 2)d) montrer que $\frac{27}{11} \left(1 - \left(\frac{16}{27}\right)^{n+1}\right) \leq S_n \leq 3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- c) En déduire que (S_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.