Correction du DNS 1

EXERCICE 1

1) L'ensemble de définition de l'équation est $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$. Pour tout réel $x \in D$:

$$\frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{x}{2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{\frac{x+2}{x}}{\frac{2+x}{2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x} \frac{2}{2+x} = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Autre méthode :

$$\frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{x}{2}} = 2 \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x} = 2 + x \Leftrightarrow x + 2 = 2x + x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0.$$

Le discriminant de cette équation du second degré est 9 et ses racines sont -2 et 1 , mais $-2 \notin D$ donc la seule solution de l'équation est 1 .

2) L'ensemble de définition de l'équation est $]0, +\infty[$. Pour tout $x > 0$ on a, en multipliant par $\sqrt{x}$:

$$\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{x}.$$

Si $x < 1$ alors $x - 1 < 0$ et cette égalité est impossible. Si $x \geq 1$ alors $x - 1 \geq 0$ donc :

$$x - 1 = \sqrt{x} \Leftrightarrow (x - 1)^2 = x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Le discriminant de cette équation du second degré est 5 et ses racines sont $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1$ et $\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \geq 1$, donc la seule solution de l'équation est $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Autre méthode : on pose $X = \sqrt{x}$ où $x > 0$. L'équation devient $X - \frac{1}{X} = 1$, soit $X^2 - X - 1 = 0$. Le discriminant de cette équation du second degré est 5 et ses racines sont $X_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ et $X_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \geq 0$. La seule solution de l'équation est donc $X_2^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

3) Posons $X = e^x$. L'équation devient

$$X^2 - 5X + 6 = 0.$$

C'est une équation du second degré dont les racines sont 2 et 3. Or

$$e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2 \quad \text{et} \quad e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$$

donc les solutions de l'équation sont $\ln 2$ et $\ln 3$.

EXERCICE 2

On raisonne par récurrence.

Pour $n = 1$ la somme vaut 1 et $\frac{3n}{2n+1} = 1$ donc l'inégalité est vérifiée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \geq \frac{3n}{2n+1}$$

et montrons que

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{3n+3}{2n+3}.$$

On a :

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Pour pouvoir conclure, il suffit donc de montrer que $\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{3n+3}{2n+3}$. Étudions le signe de la différence :

$$\begin{aligned} \frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{3n+3}{2n+3} &= \frac{3n(n+1)^2(2n+3) + (2n+1)(2n+3) - (3n+3)(n+1)^2(2n+1)}{(n+1)^2(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2(2n+1)(2n+3)} \quad (\text{après simplification}). \end{aligned}$$

Cette quantité est positive, donc on a bien $\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{3n+3}{2n+3}$.

D'après le théorème de récurrence, l'inégalité à démontrer est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 3

Les premiers termes de la suite sont $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = \frac{u_1^2}{u_0} = 4$, $u_3 = \frac{u_2^2}{u_1} = 8$, $u_4 = \frac{u_3^2}{u_2} = 16$, etc. On peut ainsi conjecturer que $u_n = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons-le par récurrence double.

On a bien $u_0 = 1 = 2^0$ et $u_1 = 2 = 2^1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n = 2^n$ et que $u_{n+1} = 2^{n+1}$ et montrons que $u_{n+2} = 2^{n+2}$. On a :

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{u_n} = \frac{(2^{n+1})^2}{2^n} = \frac{2^{2n+2}}{2^n} = 2^{n+2}.$$

Par le théorème de récurrence double, on a donc bien $u_n = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 4

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : Supposons qu'il existe deux fonctions g et h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que g est constante, $h(0) = 0$ et $f = g + h$.

Alors $f(0) = g(0) + h(0) = g(0)$. Or g est constante, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = g(0) = f(0),$$

et donc

$$h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(0).$$

Si g et h existent, elles sont donc uniques.

Synthèse : Posons $g(x) = f(0)$ et $h(x) = f(x) - f(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors g est constante, $h(0) = f(0) - f(0) = 0$ et $g(x) + h(x) = f(0) + f(x) - f(0) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Les fonctions g et h conviennent.