DM de physique n° 3

Exercice : Points de Weierstrass d'un dioptre sphérique

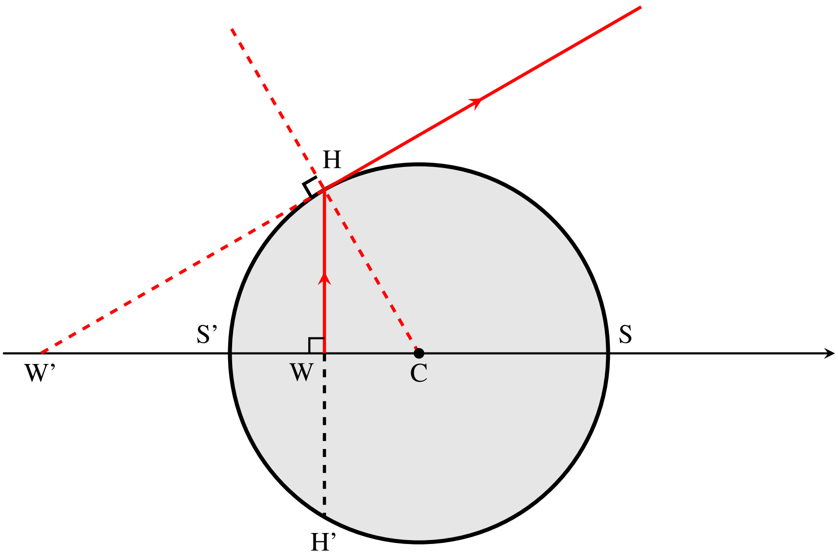


FIGURE 1 : Définition des points de Weierstrass d'un dioptre sphérique

On considère un milieu homogène transparent isotrope d'indice de réfraction n ayant la forme d'une sphère de rayon R et de centre C. Ce milieu est plongé dans l'air d'indice égal à 1.
On choisit arbitrairement une direction de référence modélisée par l'axe orienté représenté sur la figure 1. On définit, pour cette direction de référence et pour le dioptre sphérique qui sépare ces deux milieux un couple de points $(\mathrm{W}, \mathrm{W'})$, appelés *points de Weierstrass*, de la manière suivante :

- W est le point de l'axe situé à l'intérieur de la sphère d'indice n et tel qu'un rayon issu de W et orthogonal à l'axe se réfracte tangentiellement au dioptre sphérique. On note H le point d'incidence correspondant et H' son symétrique par rapport à l'axe ;
- W' est le point d'intersection du prolongement du rayon émergent et de l'axe.

On note S et S' les deux points d'intersection entre l'axe et le dioptre.

1. Déterminer l'angle d'incidence en H en fonction de n.

2. Exprimer les distances CW et CW' en fonction de R et n.

Les points de Weierstrass ont une propriété géométrique remarquable : tout rayon issu de W et qui se réfracte sur le dioptre HSH' émerge **exactement dans la direction de W'** ; on dit que le dioptre HSH' est **rigoureusement stigmatique** pour le couple de point $(\mathrm{W}, \mathrm{W'})$. Nous allons chercher à démontrer cette propriété. Pour cela on se rapporte à la figure 2 située en page suivante ; on s'intéresse **uniquement aux rayons se réfractant à travers le dioptre HSH'** ; on laisse de côté la partie HS'H'.
On considère un rayon issu de W et se réfractant en un point I quelconque du dioptre HSH', paramétré par sa direction angulaire α mesurée par rapport à l'axe orienté. On note P l'intersection du prolongement du rayon émergent et de l'axe.

3. Établir une relation entre α, β et r.

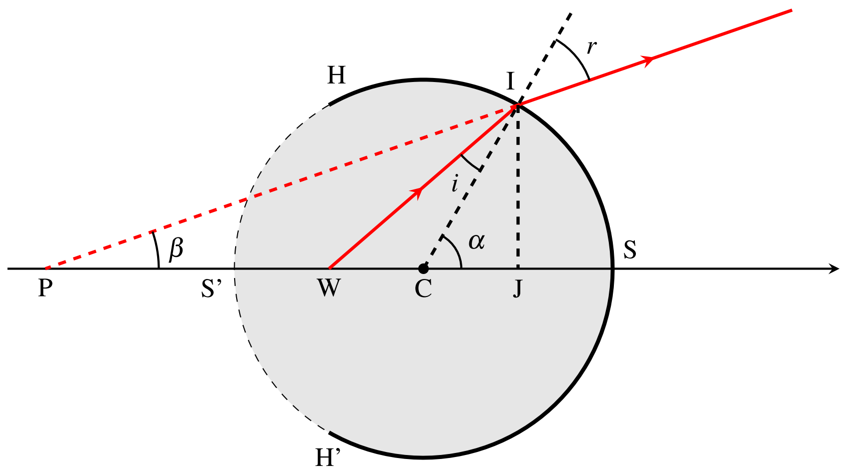


FIGURE 2 : Marche d'un rayon quelconque se réfractant à travers le dioptre HSH'

4. Montrer que :

$$R\sin\alpha = R\left(\frac{1}{n}+\cos\alpha\right)\tan(\alpha-i) = (\mathrm{CP}+R\cos\alpha)\tan\beta$$

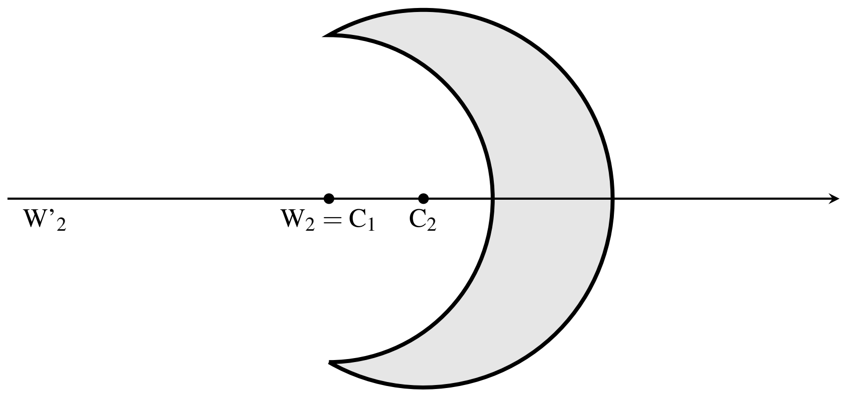
5. L'angle α étant un paramètre fixé arbitrairement, il s'agit de déterminer les quatre inconnues i, r, β et CP ; pour cela nous avons besoin au minimum de quatre équations reliant ces inconnues entre elles. Les résultats des questions 3 et 4 nous en fournissent déjà trois. Quel phénomène physique n'a-t-on pas encore traduit en équation ? Proposer alors une expression pour l'équation manquante.

6. La résolution du système, que l'on ne demande pas d'effectuer, conduit à :

$$\tan i = \tan\beta = \frac{\sin\alpha}{n+\cos\alpha} \quad ; \quad \tan r = \frac{n\sin\alpha}{1+n\cos\alpha}$$

Exprimer CP et justifier que **tout** rayon issu de W et se réfractant sur le dioptre HSH' émerge exactement dans la direction de W'.

On considère désormais la lentille ci-dessous, appelée *ménisque d'Amici*, constituée de deux dioptres sphériques. Elle est construite dans un matériau d'indice n, de sorte que le centre C_1 du dioptre d'entrée est confondu avec le point de Weierstrass W_2 du dioptre de sortie.



7. Tracer la marche d'un rayon issu de W_2 et traversant la lentille ; quelle est l'image de W_2 ?

Un ménisque d'Amici est **rigoureusement stigmatique** pour les points (W, W'). On pourrait montrer qu'il est également **aplanétique**, ce qui signifie qu'il produit l'image d'un petit objet situé autour de W avec un minimum d'aberrations, même en étant éclairé en-dehors des conditions de Gauss! On trouve à l'adresse suivante une animation qui permet de visualiser ces propriétés :

http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/optigeo/menisque.html

Les ménisques d'Amici furent utilisés à une époque comme lentille frontale pour les microscopes.