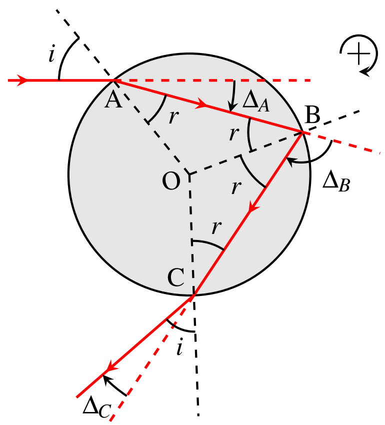
Corrigé DS1

Exercice 1 : Arc-en-ciel

1. La loi de la réfraction en A s'écrit : $\boxed{\sin i = n \sin r}$.

2. Le triangle OAB est isocèle en O donc l'angle d'incidence en B est égal à r. On applique le principe de retour inverse de la lumière en A. Un rayon qui atteint le dioptre eau-air sous l'angle r émerge dans l'air sous l'angle i. C'est exactement ce qui se passe au point B, il existe donc un rayon réfracté en B, qui émerge de la goutte sous l'angle i. Le même raisonnement s'applique pour chaque réflexion dans la goutte, ainsi le rayon réfléchi en B atteint le dioptre en C sous l'angle r (OBC isocèle en O) donc il y a un rayon qui se réfracte dans l'air sous l'angle i.

3. On exprime les déviations angulaires successives. En A : $\Delta_A = i - r$, en B : $\Delta_B = \pi - 2r$ puis en C : $\Delta_C = i - r$. La déviation angulaire totale s'obtient en sommant : $\boxed{\Delta = \pi + 2i - 4r}$.



Puisque $r = \arcsin(\frac{\sin i}{n})$ on peut écrire Δ en fonction de x de la manière suivante :

$$\boxed{\Delta = \pi + 2\arcsin(x) - 4\arcsin(x/n)}$$

4. On dérive la fonction $\Delta(x)$ en s'aidant du formulaire :

$$\Delta'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4}{n\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}}$$

La fonction $\Delta(x)$ passe par un extremum si et seulement si la dérivée s'annule :

$$\Delta'(x) = 0 \iff \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{n^2-x^2}} \iff 4\left(1-x^2\right) = n^2 - x^2$$
$$\iff 3x^2 = 4 - n^2$$

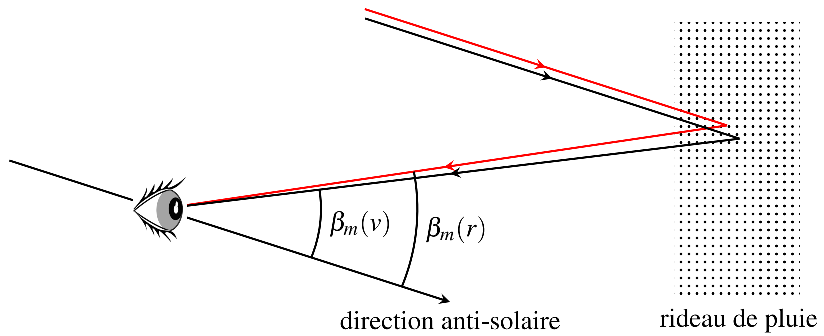
L'angle i est compris entre 0 et $\pi/2$ donc on choisit la racine positive : $\boxed{x_m = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}}$.

5. Un faisceau lumineux parallèle fin qui atteint la goutte émerge sous la forme d'un faisceau à peu près conique. Un faisceau qui atteint la goutte autour de i_m est peu dispersé, au sens où l'ouverture angulaire du faisceau de sortie est faible. Cela s'explique par le fait qu'autour du minimum de déviation la valeur de D ne dépend quasiment pas de i, les rayons émergents sont dans des directions très proches les unes des autres. À l'inverse un faisceau atteignant la goutte autour d'un angle différent est beaucoup plus dispersé. Pour un observateur situé à grande distance de la goutte, comme c'est le cas quand on observe un arc-en-ciel, la lumière perçue est beaucoup plus intense dans la direction Δ_m car elle correspond à un faisceau peu ouvert, donc d'intensité lumineuse plus grande (l'énergie lumineuse est plus "concentrée" dans cette direction).

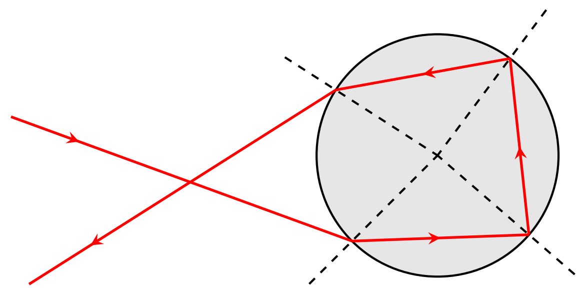
6. Les applications numériques donnent :

pour le violet : $\begin{cases} \boxed{x_m(v) = 0,8556} \\ \boxed{\Delta_m(v) = 139,4°} \end{cases}$ pour le rouge : $\begin{cases} \boxed{x_m(r) = 0,8624} \\ \boxed{\Delta_m(r) = 137,5°} \end{cases}$

7. On mesure la position angulaire d'une couleur de l'arc-en-ciel avec l'angle β_m mesuré par rapport à la direction anti-solaire (voir figure ci-dessous). Cet angle vérifie $\beta_m = \pi - \Delta_m$. Pour une couleur donnée toutes les directions possibles se trouvent sur cône centré sur la direction anti-solaire et d'ouverture angulaire β_m, d'où le fait que chaque couleur forme un "arc" dont le centre est toujours sous l'horizon car le soleil est, lui, au-dessus de l'horizon. La couleur rouge est celle qui a la déviation la plus faible, donc l'angle β_m le plus élevé. Le rouge semble provenir d'une direction "plus haute" dans le ciel, **il se trouve du côté extérieur de l'arc-en-ciel**. On représente schématiquement la situation.



<u>Remarque</u> : Dans des conditions d'éclairement favorables on peut observer un second arc-en-ciel, appelé *secondaire*. On l'observe dans le ciel au-dessus de l'arc primaire et il a ses couleurs inversées par rapport à celui-ci (le rouge est situé à l'intérieur). Il est le résultat d'une **double réflexion** des rayons à l'intérieur de la goutte (voir figure ci-dessous). Il est moins lumineux car l'intensité décroît au fil des réflexions internes dans la goutte. Le sens des couleurs est inversé car les rayons qui forment cet arc sont déviés à l'intérieur de la goutte dans le sens contraire de ceux qui forment l'arc primaire.



Exercice 2 : Mesurer l'énergie d'une bombe atomique

1. $[E] = \mathrm{ML^2T^{-2}}$ et $[\rho] = \mathrm{ML^{-3}}$. L'équation aux dimensions s'écrit $\mathrm{ML^2T^{-2}} = \mathrm{T}^\alpha \times \left(\mathrm{ML^{-3}}\right)^\beta \times \mathrm{L}^\gamma = \mathrm{M}^\beta \mathrm{L}^{\gamma-3\beta}\mathrm{T}^\alpha$. Il s'agit alors de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \beta = 1 \\ \gamma - 3\beta = 2 \\ \alpha = -2 \end{cases} \implies \alpha = -2\,,\ \beta = 1\,,\ \gamma = 5$$

Finalement, la loi recherchée est la suivante : $\boxed{E = \dfrac{\rho r^5}{t^2}}$.

2. Le mesurage à la régle graduée du diamètre du nuage donne $D = 4{,}75\,\mathrm{cm}$. Les incertitudes sur cette valeur sont dues au graduations de la règle mais également à l'allure du nuage, qui n'est pas parfaitement sphérique, notamment à la base. On estime que l'incertitude sur le diamètre mesuré est de l'ordre de $0{,}5\,\mathrm{mm}$.

Ensuite, il faut ramener cette valeur à la dimension réelle du nuage en utilisant l'échelle fournie. On mesure que $\ell = 100\,\mathrm{m}$ correspond à une distance sur l'image environ égale à $L = 2{,}22\,\mathrm{cm}$ avec $u(L) = \frac{1\,\mathrm{grad}}{\sqrt{12}} = 0{,}3\,\mathrm{mm}$ (ici, seule l'incertitude sur les graduations intervient car le trait est fin et clairement visible). La valeur réelle du diamètre résulte d'un produit en croix :

$$d = \frac{D \times \ell}{L} = 214\,\mathrm{m} \implies r = \frac{d}{2} = 107\,\mathrm{m}$$

Pour déterminer $u(d)$, on propage les incertitudes dans une formule de type loi de puissance :

$$\frac{u(d)}{d} = \sqrt{\left(\frac{u(D)}{D}\right)^2 + \left(\frac{u(L)}{L}\right)^2} \implies u(d) = 214 \times \sqrt{\left(\frac{0{,}05}{4{,}75}\right)^2 + \left(\frac{0{,}03}{2{,}22}\right)^2} = 3{,}7\,\mathrm{m}$$

$$\implies u(r) = \frac{u(d)}{2} = 1{,}8\,\mathrm{m}$$

Il faut désormais déterminer numériquement l'énergie libérée par la bombe :

$$E = \frac{\rho r^5}{t^2} = \frac{1{,}20 \times (107)^5}{\left(15{,}0 \cdot 10^{-3}\right)^2} = 7{,}48 \times 10^{13}\,\mathrm{J} = 1{,}63 \cdot 10^7\,\mathrm{kg\,TNT}$$

Enfin, l'incertitude sur cette valeur est obtenue de la manière suivante :

$$\frac{u(E)}{E} = \sqrt{25\left(\frac{u(r)}{r}\right)^2 + 4\left(\frac{u(t)}{t}\right)^2} \implies u(E) = 1{,}4 \cdot 10^6\,\mathrm{kg\,TNT}$$

Finalement l'énergie libérée par l'explosion de la bombe peut être évaluée de la manière suivante :

$$\boxed{E = 1{,}63 \cdot 10^7\,\mathrm{kg\,TNT}\,;\ u(E) = 0{,}14 \cdot 10^7\,\mathrm{kg\,TNT}}$$

3. En théorie, $E = \frac{\rho r^5}{t^2} \implies r = E^{1/5} \times \rho^{-1/5} \times t^{2/5} \implies \ln r = \frac{2}{5}\ln t + \frac{1}{5}\ln\left(\frac{E}{\rho}\right)$. La relation entre $\ln r$ et $\ln t$ est censée être affine, de coefficient directeur $\frac{2}{5}$. C'est pourquoi le choix de tracer $\ln r$ en fonction de $\ln t$ est pertinent.

4.a) Voir cours.

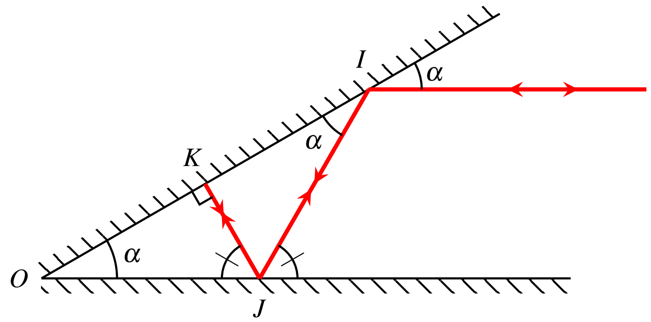
4.b) $\boxed{a = 0{,}388\ ;\ u(a) = 0{,}012}$.

4.c) L'écart normalisé vaut : $\boxed{\mathrm{EN} = \dfrac{|a_{\mathrm{exp}} - a_{\mathrm{théo}}|}{u(a)} = \dfrac{0{,}4 - 0{,}388}{0{,}012} = 1}$.

Il est inférieur à 2. Sur la figure 5, on constate que les point expérimentaux sont très proches du modèle. C'est confirmé par les valeurs des résidus normalisés qui sont tous compris entre -2 et 2. **Les résultats expérimentaux sont compatibles avec la loi obtenue par analyse dimensionnelle**.

Exercice 3 : Miroirs formant un coin

On annote le schéma de l'énoncé :



Pour émerger des miroirs en suivant le même chemin en sens inverse, il faut nécessairement qu'à mi-chemin, le rayon subisse une réflexion sous incidence normale (en K).

En I, l'angle entre le rayon incident et le miroir est égal à α (angles correspondants). On retrouve par symétrie (loi de la réflexion) : $\widehat{KIJ} = \alpha$.

Dans le triangle IKJ rectangle en K: $\widehat{IJK} = \frac{\pi}{2} - \alpha$. En exploitant à nouveau la symétrie par rapport à la normale en J, on montre que :

$$2\widehat{OJK} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{2} + \alpha \iff \widehat{OJK} = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$$

Pour terminer, on exploite la somme des angles du triangle OJK :

$$\alpha + \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \iff \frac{3\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} \implies \boxed{\alpha = \frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad} = 30^\circ}$$