Devoir n°4 (non surveillé)

EXERCICE 1

Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & + & az & = & 3 \end{array}\right.$$

où a est un réel fixé.

EXERCICE 2

On considère le nombre complexe $z = 2\sqrt{3} - 2 + i(2\sqrt{3} + 2)$.

1) Calculer z^2 sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

2) En déduire la forme exponentielle de z.

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos \dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{5\pi}{12}$.

EXERCICE 3 - L'inégalité de Cauchy-Schwarz

1) Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels. Le but de cette question est d'établir **l'inégalité de Cauchy-Schwarz** :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Pour cela on pose, pour tout réel x, $P(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i x + b_i)^2$.

a) Justifier que $P(x)$ est un polynôme en x de degré inférieur ou égal à 2 et préciser ses coefficients (sous forme de sommes) et son discriminant.

b) Justifier que $P(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le polynôme $P(x)$ peut-il avoir exactement deux racines réelles distinctes ? Que peut-on alors dire du signe de son discriminant ?

c) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à des réels bien choisis, établir les inégalités suivantes :

a) $\forall\,(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} a_i^2$.

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\sqrt{i} \leqslant \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$.

c) $\forall\,(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, $(x_1 + \ldots + x_n)\left(\dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2$.