Correction du DNS 2

EXERCICE 1

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i^2+2ij+j^2)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(i^2\sum_{j=1}^{n}1+2i\sum_{j=1}^{n}j+\sum_{j=1}^{n}j^2\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(ni^2+2i\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\
&= n\sum_{i=1}^{n}i^2+n(n+1)\sum_{i=1}^{n}i+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\sum_{i=1}^{n}1\\
&= \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n^2(n+1)^2}{2}+\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}\\
&= \frac{2n^2(n+1)(2n+1)+3n^2(n+1)^2}{6}\\
&= \frac{n^2(n+1)(4n+2+3n+3)}{6}\\
&= \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}.
\end{aligned}$$

EXERCICE 2

1) Attention : le rang initial est q.

Pour $n=q$ on a $\displaystyle\sum_{k=q}^{q}\binom{k}{q}=\binom{q}{q}=1=\binom{q+1}{q+1}$.

Soit $n \geqslant q$. Supposons que $\displaystyle\sum_{k=q}^{n}\binom{k}{q}=\binom{n+1}{q+1}$. Alors

$$\sum_{k=q}^{n+1}\binom{k}{q}=\sum_{k=q}^{n}\binom{k}{q}+\binom{n+1}{q}=\binom{n+1}{q+1}+\binom{n+1}{q}=\binom{n+2}{q+1}$$

d'après la formule de Pascal.

D'après le théorème de récurrence on a donc bien $\displaystyle\sum_{k=q}^{n}\binom{k}{q}=\binom{n+1}{q+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $q \geqslant n$.

2) Pour $q=1$ on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}=\binom{n+1}{2}$, soit

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Pour $q=2$ on obtient $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2}=\binom{n+1}{3}$, soit $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{2}=\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$ qui donne

$$\sum_{k=2}^{n}k(k-1)=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

Enfin pour $q=3$ on obtient $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\binom{k}{3}=\binom{n+1}{4}$, soit $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\frac{k(k-1)(k-2)}{6}=\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{24}$ qui donne

$$\sum_{k=3}^{n}k(k-1)(k+2)=\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{4}.$$

EXERCICE 3

1) On a $u_0 = \dfrac{\binom{0}{0}}{\binom{0}{0}} = 1$, $u_1 = \dfrac{\binom{4}{1}}{\binom{4}{2}} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ et $u_2 = \dfrac{\binom{8}{2}}{\binom{8}{4}} = \dfrac{28}{70} = \dfrac{2}{5}$, donc $S_0 = u_0 = 1$, $S_1 = u_0 + u_1 = \dfrac{5}{3}$ et $S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = \dfrac{31}{15}$.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n = \dfrac{\frac{(4n)!}{n!(3n)!}}{\frac{(4n)!}{(2n)!(2n)!}} = \dfrac{(2n)!^2}{n!(3n)!}$, donc $u_{n+1} = \dfrac{(2n+2)!^2}{(n+1)!(3n+3)!}$, et donc

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{(2n+2)!^2}{(n+1)!(3n+3)!}}{\frac{(2n)!^2}{n!(3n)!}} \\
&= \frac{(2n+2)!^2 n!(3n)!}{(2n)!^2(n+1)!(3n+3)!} \\
&= \frac{(2n+1)^2(2n+2)^2}{(n+1)(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \\
&= \frac{4(2n+1)^2(n+1)^2}{3(n+1)(3n+1)(3n+2)(n+1)} \\
&= \frac{4(2n+1)^2}{3(3n+1)(3n+2)}.
\end{aligned}$$

b) La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ (fonction rationnelle) et, pour tout x positif :

$$f'(x) = \frac{(8x+4)(3x+1)(3x+2) - (2x+1)^2(18x+9)}{(3x+1)^2(3x+2)^2} = \frac{-2x-1}{(3x+1)^2(3x+2)^2} < 0.$$

La fonction f est donc strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. On a $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x+1)^2}{(3x+1)(3x+2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2\left(1+\frac{1}{2x}\right)^2}{9x^2\left(1+\frac{1}{3x}\right)\left(1+\frac{2}{3x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4\left(1+\frac{1}{2x}\right)^2}{9\left(1+\frac{1}{3x}\right)\left(1+\frac{2}{3x}\right)} = \frac{4}{9}.$$

c) D'après la question précédente on a l'encadrement

$$\frac{4}{9} \leqslant \frac{(2x+1)^2}{(3x+1)(3x+2)} \leqslant \frac{1}{2}$$

pour tout x positif. En multipliant par $\dfrac{4}{3}$ on a donc d'après 2)a)

$$(*) \qquad \frac{16}{27} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{2}{3}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) On raisonne par récurrence.

Pour $n = 0$ on a $\left(\dfrac{16}{27}\right)^0 = u_0 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^0 = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\left(\dfrac{16}{27}\right)^n \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Alors en multipliant membre à membre avec l'encadrement $(*)$ de la question 2)c) on obtient

$$\left(\frac{16}{27}\right)^{n+1} \leqslant u_{n+1} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

D'après le théorème de récurrence, l'encadrement est donc vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e) On a $-1 < \dfrac{16}{27} < 1$ et $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$ donc les suites de terme général $\left(\dfrac{16}{27}\right)^n$ et $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ tendent vers 0, et donc, par le théorème des gendarmes, la suite (u_n) aussi.

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} > 0$$

donc la suite (S_n) est strictement croissante.

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\left(\frac{16}{27}\right)^k \leqslant u_k \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^k$, donc

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{16}{27}\right)^k \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

On reconnaît des sommes géométriques :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{16}{27}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{16}{27}\right)^{n+1}}{1 - \frac{16}{27}} = \frac{27}{11}\left(1 - \left(\frac{16}{27}\right)^{n+1}\right)$$

et de même

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$

On a ainsi l'encadrement

$$\frac{27}{11}\left(1 - \left(\frac{16}{27}\right)^{n+1}\right) \leqslant S_n \leqslant 3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) D'après ce qui précède la suite (S_n) est majorée par 3. De plus elle est croissante, donc elle est convergente. En passant à la limite dans l'encadrement précédent, on obtient

$$\frac{27}{11} \leqslant \lim_{n \to +\infty} S_n \leqslant 3.$$