

Corrigé DM3

Exercice : Points de Weierstrass d'un dioptré sphérique

1. Le rayon issu de W se réfracte avec un angle $r = \pi/2$, par conséquent **l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion totale** : $i = \arcsin(1/n)$.

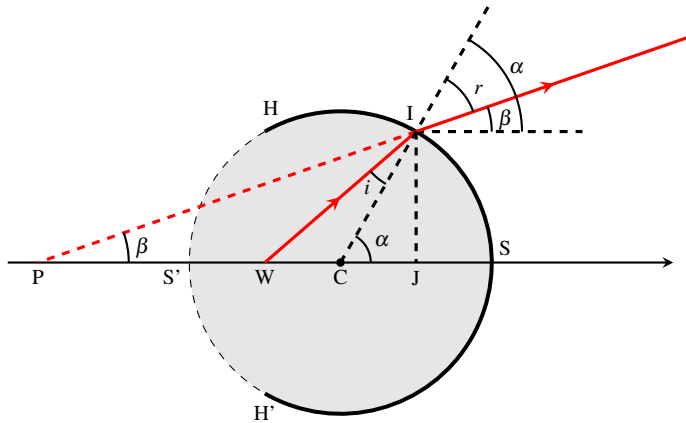
2. Dans le triangle rectangle WHC :

$$\sin i = \frac{CW}{CH} \iff \frac{1}{n} = \frac{CW}{R} \iff \boxed{CW = \frac{R}{n}}$$

Dans le triangle rectangle W'CH, on montre rapidement que $\widehat{CW'H} = i$. On a alors :

$$\sin i = \frac{CH}{CW'} \iff \frac{1}{n} = \frac{R}{CW'} \iff \boxed{CW' = nR}$$

3. On trace deux angles correspondants respectivement à α et β au niveau du sommet I. On constate alors immédiatement que $\alpha = r + \beta$.



4. On utilise ici le fait que IJ est un côté commun aux triangles rectangles PIJ, WIJ et CIJ :

$$IJ = CI \sin \alpha = WJ \tan(\widehat{IWJ}) = PJ \tan \beta$$

Par ailleurs on a :

$$CI = R ; \widehat{IWJ} = \alpha - i ; WJ = CW + CJ = CW + R \cos \alpha ; PJ = CP + CJ = CP + R \cos \alpha$$

Cela permet d'aboutir au résultat attendu :

$$\boxed{R \sin \alpha = \left(\frac{R}{n} + R \cos \alpha \right) \tan(\alpha - i) = (CP + R \cos \alpha) \tan \beta}$$

5. Il manque la loi de la réfraction appliquée en I : $n \sin i = \sin r$!

6. On exploite le résultat de la question 4 :

$$R \sin \alpha = (CP + R \cos \alpha) \frac{\sin \alpha}{n + \cos \alpha} \iff CP + R \cos \alpha = R(n + \cos \alpha) \iff \boxed{CP = nR}$$

La distance CP obtenue est indépendante de l'angle α ; on arrive à la conclusion que **tout** rayon incident issu de W et qui se réfracte par le dioptré HSH' émerge dans une direction qui coupe l'axe à la distance nR du centre, c'est-à-dire **exactement au point W'**, comme on l'a montré à la question 2.

7. Le rayon qui traverse le dioptré d'entrée arrive **toujours sous incidence normale** (car W_2 est confondu avec le centre de ce dioptré) ; le rayon n'est pas dévié par le dioptré d'entrée et est réfracté par le dioptré de sortie exactement comme on l'a étudié dans cet exercice ; il émerge exactement dans la direction de W'_2 . **W_2 et W'_2 sont conjugués par le ménisque d'Amici.**

