

Devoir n°5 (non surveillé)

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^8 - 2(i\sqrt{3} - 1)z^4 - 8(1 + i\sqrt{3}) = 0,$$

et représenter dans le plan complexe les images de ses solutions.

EXERCICE 2

Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. On pose $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.

- 1) Que vaut $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$?
- 2) En déduire les valeurs de $\alpha + \beta$ et de $\alpha\beta$, puis trouver une équation du second degré dont α et β sont les solutions.
- 3) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et de $\cos \frac{4\pi}{5}$.

EXERCICE 3

Pour tout complexe z on pose

$$f(z) = z^3 - z + 2.$$

Le but de l'exercice est de déterminer les valeurs minimale et maximale de $|f(z)|$ lorsque $|z| = 1$.

- 1) On pose $z = e^{it}$ où t est un réel. Montrer que

$$f(z)\overline{f(z)} = 4\cos 3t - 2\cos 2t - 4\cos t + 6.$$

Pour les questions suivantes on pourra utiliser sans les démontrer les formules :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cos 3t &= 4\cos^3 t - 3\cos t \\ \sin 3t &= -4\sin^3 t + 3\sin t \end{cases}.$$

- 2) On considère la fonction g définie sur $[0, \pi]$ par

$$g(t) = 4\cos 3t - 2\cos 2t - 4\cos t + 6$$

pour tout $t \in [0, \pi]$.

- a) Montrer que, pour tout $t \in [0, \pi]$,

$$g'(t) = -48\sin t \left(\cos t + \frac{1}{2} \right) \left(\cos t - \frac{2}{3} \right).$$

On évitera de partir du résultat.

- b) En déduire le tableau de variation de g . On notera α l'unique réel appartenant à $[0, \pi]$ tel que $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ et on précisera la valeur de $g(\alpha)$.

- 3) Conclure.