

Correction du DNS 1

EXERCICE 2

On a :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + az = 3 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + 4z = 1 \\ y + (a+2)z = 1 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (a+2)z = 1 \\ (a-2)z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Si $a = 2$ le système devient :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + 4z = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 5z \\ y = 1 - 4z \end{cases} \end{aligned}$$

donc les solutions sont les triplets de la forme $(5z, 1 - 4z, z)$ avec $z \in \mathbb{R}$. Noter que l'ensemble des solutions est une droite de $\mathbb{R}^3$.

Si $a \neq 2$ le système devient :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + y = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

donc le système a pour unique solution le triplet $(0, 1, 0)$.

EXERCICE 2

1) On a :

$$z^2 = (2\sqrt{3} - 2)^2 + 2i(2\sqrt{3} - 2)(2\sqrt{3} + 2) + (2\sqrt{3} + 2)^2 = 12 - 8\sqrt{3} + 4 + 2i(12 - 4) - (12 + 8\sqrt{3} + 4) = -16\sqrt{3} + 16i.$$

Pour mettre z^2 sous forme exponentielle on peut calculer son module et un de ses arguments, ou remarquer que :

$$z^2 = -16\sqrt{3} + 16i = 32 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 32 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = 32e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

2) Les racines carrées de $32e^{i\frac{5\pi}{6}}$ sont $\sqrt{32}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ et $-\sqrt{32}e^{i\frac{5\pi}{12}}$. Comme la partie réelle de z est positive, on a donc

$$z = \sqrt{32}e^{i\frac{5\pi}{12}} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}.$$

3) On a ainsi

$$4\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right) = 2\sqrt{3} - 2 + i(2\sqrt{3} + 2).$$

En identifiant parties réelles et imaginaires on en déduit que

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{2\sqrt{3} - 2}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{2\sqrt{3} + 2}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

EXERCICE 3

1) a) Il suffit de développer :

$$P(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2 = \sum_{i=1}^n (a_i^2 x^2 + 2a_i b_i x + b_i^2) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) x^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) x + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

C'est bien un polynôme du second degré (au plus) dont le discriminant est

$$\Delta = 4 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x)$ est une somme de carrés donc $P(x) \geq 0$.

Si P avait deux racines réelles distinctes, alors il prendrait des valeurs strictement négatives et des valeurs strictement positives, ce qui n'est pas le cas. Par conséquent il a au plus une racine réelle (ou il est nul). On en déduit que son discriminant est négatif ou nul.

c) D'après ce qui précède on a

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \leq 0$$

qui donne immédiatement l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

2) a) En prenant $b_i = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on obtient

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n 1 \right)$$

soit

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

b) En prenant $a_i = i$ et $b_i = \sqrt{i}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on obtient

$$\left(\sum_{i=1}^n i \sqrt{i} \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n i \right)$$

soit

$$\left(\sum_{i=1}^n i \sqrt{i} \right)^2 \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \frac{n(n+1)}{2}$$

et donc

$$\sum_{i=1}^n i \sqrt{i} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}.$$

c) En appliquant l'inégalité aux réels $\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n}, \frac{1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}$ on obtient

$$\left(\sum_{i=1}^n 1 \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right)$$

soit

$$n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right)$$

qu'on peut écrire

$$(x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2.$$