

Correction du DNS 5

EXERCICE 1

Posons $Z = z^4$. L'équation devient

$$(E') : Z^4 - 2(i\sqrt{3} - 1)Z - 8(1 + i\sqrt{3}) = 0.$$

C'est une équation du second degré dont le discriminant est $4(i\sqrt{3} - 1)^2 + 32(1 + i\sqrt{3}) = 24 + 24i\sqrt{3}$. En appliquant la méthode vue en cours, on trouve que les racines carrées de $24 + 24i\sqrt{3}$ sont $6 + 2i\sqrt{3}$ et $-6 - 2i\sqrt{3}$ (on peut aussi remarquer que $24 + 24i\sqrt{3} = 48e^{i\pi/3}$). Les solutions de (E') sont donc $\frac{2(i\sqrt{3} - 1) + 6 + 2i\sqrt{3}}{2} = 2 + 2i\sqrt{3}$ et $\frac{2(i\sqrt{3} - 1) - 6 - 2i\sqrt{3}}{2} = -4$.

Réolvons l'équation $z^4 = 2 + 2i\sqrt{3}$. On a $2 + 2i\sqrt{3} = 4e^{i\pi/3}$ donc on voit que $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/12}$ est solution. En multipliant par les racines quatrièmes de l'unité on obtient toutes les solutions : $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/12}$, $\sqrt[4]{2}e^{i7\pi/12}$, $\sqrt[4]{2}e^{i13\pi/12}$ et $\sqrt[4]{2}e^{i19\pi/12}$.

Réolvons l'équation $z^4 = -4$. On a $-4 = 4e^{i\pi}$ donc on voit que $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/4}$ est solution. En multipliant par les racines quatrièmes de l'unité on obtient toutes les solutions : $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/4}$, $\sqrt[4]{2}e^{i3\pi/4}$, $\sqrt[4]{2}e^{i5\pi/4}$ et $\sqrt[4]{2}e^{i7\pi/4}$.

L'équation a donc huit solutions :

$$\sqrt[4]{2}e^{i\pi/12}, \sqrt[4]{2}e^{i7\pi/12}, \sqrt[4]{2}e^{i13\pi/12}, \sqrt[4]{2}e^{i19\pi/12}, \sqrt[4]{2}e^{i\pi/4}, \sqrt[4]{2}e^{i3\pi/4}, \sqrt[4]{2}e^{i5\pi/4} \text{ et } \sqrt[4]{2}e^{i7\pi/4}.$$

EXERCICE 2

1) C'est une somme géométrique :

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \frac{1 - \omega^5}{1 - \omega} = 0$$

car $\omega^5 = e^{i2\pi} = 1$.

2) On a

$$\alpha + \beta = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = -1$$

et

$$\alpha\beta = \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 = \omega^3 + \omega^4 + \omega + \omega^2 = -1$$

car $\omega^6 = \omega$ et $\omega^7 = \omega^2$.

On en déduit que α et β sont les solutions de l'équation $z^2 + z - 1 = 0$ (cf proposition 22 du cours sur les complexes).

3) Les solutions de l'équation $z^2 + z - 1 = 0$ sont $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

De plus $\alpha = e^{i2\pi/5} + e^{i8\pi/5} = e^{i2\pi/5} + e^{-i2\pi/5} = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\beta = e^{i4\pi/5} + e^{i6\pi/5} = e^{i4\pi/5} + e^{-i4\pi/5} = 2\cos\frac{4\pi}{5}$.

On en déduit que $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ (car $\alpha > 0$ et $\beta < 0$) puis que

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}.$$

EXERCICE 3

1) On a

$$\begin{aligned} f(z)\overline{f(z)} &= (e^{i3t} - e^{it} + 2)(e^{-i3t} - e^{-it} + 2) \\ &= 1 - e^{i2t} + 2e^{i3t} - e^{-i2t} + 1 - 2e^{it} + 2e^{-i3t} - 2e^{-it} + 4 \\ &= 2(e^{i3t} + e^{i3t}) - (e^{i2t} + e^{-i2t}) - 2(e^{it} + e^{-it}) + 6 \\ &= 4\cos 3t - 2\cos 2t - 4\cos t + 6. \end{aligned}$$

2) a) La fonction g est dérivable comme somme de fonctions dérivables. Pour tout $t \in [0, \pi]$:

$$\begin{aligned} g'(t) &= -12\sin 3t + 4\sin 2t + 4\sin t \\ &= 48\sin^3 t - 36\sin t + 8\sin t \cos t + 4\sin t \\ &= 48\sin^3 t - 32\sin t + 8\sin t \cos t \\ &= \sin t(48\sin^2 t + 8\cos t - 32) \\ &= \sin t(48(1 - \cos^2 t) + 8\cos t - 32) \\ &= \sin t(-48\cos^2 t + 8\cos t + 16) \\ &= -8\sin t(6\cos^2 t - \cos t - 2). \end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $6X^2 - X - 2$ est 49 et ses racines sont $\frac{1-7}{12} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{1+7}{12} = \frac{2}{3}$. Ainsi

$$6X^2 - X - 2 = 6 \left(X + \frac{1}{2} \right) \left(X - \frac{2}{3} \right)$$

et donc

$$g'(t) = -48 \sin t \left(\cos t + \frac{1}{2} \right) \left(\cos t - \frac{2}{3} \right).$$

b) Sur l'intervalle $[0, \pi]$:

- $\sin t$ s'annule en 0 et en π et est strictement positif ailleurs,
- $\cos t + \frac{1}{2}$ s'annule en $\frac{2\pi}{3}$, est strictement positif avant $\frac{2\pi}{3}$ et strictement négatif après,
- $\cos t - \frac{2}{3}$ s'annule en un unique réel $\alpha \in]0, \pi/2[$, est strictement positif avant α et strictement négatif après.

Avec un tableau de signes on en déduit que g' s'annule en 0, α , $2\pi/3$ et π , est strictement positive sur $] \alpha, 2\pi/3[$ et strictement négative ailleurs. Les variations de g s'en déduisent.

On a facilement $g(0) = 4$, $g(\pi) = 4$, $g(2\pi/3) = 13$ et en écrivant $g(t) = 4(4\cos^3 t - 3\cos t) - 2(2\cos^2 t - 1) - 4\cos t + 6$ on trouve que $g(\alpha) = 8/27$.

3) D'après l'étude précédente, le minimum de la fonction g sur $[0, \pi]$ est $8/27$ et son maximum est 13. Comme g est paire et 2π -périodique, ce sont des minimum/maximum sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On a obtenu ainsi les valeurs minimale et maximale de $f(z)\overline{f(z)}$, i.e. de $|f(z)|^2$, lorsque $|z| = 1$. Les valeurs minimale et maximale de $|f(z)|$ lorsque $|z| = 1$ sont donc respectivement $\sqrt{\frac{8}{27}}$ et $\sqrt{13}$.