

PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

I Calcul de primitives

1 Définition

Définition 1 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur I . On appelle **primitive de f sur I** toute fonction $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur I telle que $F' = f$.

Proposition 1 Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Cela signifie que si F_1 et F_2 sont deux primitives de f , alors il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que $F_1 = F_2 + c$.

Démonstration :

Soient F_1 et F_2 deux primitives de f sur I . Alors $F_1' = F_2' = f$, donc $(F_1 - F_2)' = 0$, et donc $F_1 - F_2$ est constante sur I . $\square$

2 Théorème fondamental

Théorème 2 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur I . Soit $a \in I$. La fonction $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Démonstration : Admis pour l'instant. $\square$

Corollaire 3 Toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives.

Remarques :

- 1) D'après la proposition 1, il n'y a pas unicité. On ne dira donc pas *la* primitive de f , mais *une* primitive de f .
- 2) On pourra noter $\int_a^x f(t) dt$ ou $\int f(x)dx$ (sans bornes) une primitive générique de f .

Corollaire 4 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Soit F une primitive de f sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

que l'on note $[F(x)]_a^b$.

Démonstration :

D'après le théorème 2, la fonction G définie par $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur $[a, b]$. La fonction F aussi. Il existe donc une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que $F = G + c$. Or $G(a) = 0$, donc $F(a) = c$. On a ainsi $\int_a^b f(t)dt = G(b) = F(b) - c = F(b) - F(a)$. $\square$

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_a^b 1 dx ; \int_1^2 x dx ; \int_0^1 e^t dt ; \int_1^e \frac{dx}{x} ; \int_0^{\pi/4} \cos x dx ; \int_0^{\pi/4} \sin x dx ; \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

3 Intégration par parties

Définition 2 Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si elle est dérivable sur I et que sa dérivée est continue sur I .

Cette notion sera revue en détail plus tard.

Proposition 5 Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . Soient $a, b \in I$. Alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

Démonstration :

Les intégrales sont bien définies car u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ donc u' et v' sont continues sur I . La formule de dérivation d'un produit $(uv)' = u'v + uv'$ permet d'écrire :

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b (uv)'(x) dx = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

et le résultat s'ensuit. $\square$

Pour les intégrales indéfinies on a :

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx.$$

L'intégration par parties sert à calculer des intégrales ou des primitives d'un produit.

Exemples :

1) Soit à calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$. On pose $u(x) = x$, donc on a $u'(x) = 1$, et pour avoir $v'(x) = \cos x$ on pose $v(x) = \sin x$. Alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx &= [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\ &= \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

2) Déterminons une primitive de la fonction $\ln$ sur $]0, +\infty[$. On va intégrer par parties en écrivant que $\ln x = 1 \times \ln x$. On pose $u(x) = \ln x$, donc on a $u'(x) = \frac{1}{x}$, et pour avoir $v'(x) = 1$ on pose $v(x) = x$. Alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et :

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= x \ln x - \int x \times \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln x - \int 1 dx \\ &= x \ln x - x \end{aligned}$$

4 Changement de variable

Proposition 6 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I . Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$ telle que $\varphi([\alpha, \beta]) \subset I$. Alors :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x) dx.$$

Démonstration :

Soit F une primitive de f sur I . Alors $F \circ \varphi$ est dérivable sur $[\alpha, \beta]$ et $(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi) \times \varphi' = (f \circ \varphi) \times \varphi'$, donc :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} (F \circ \varphi)'(x) dx \\ &= [(F \circ \varphi)(x)]_{\alpha}^{\beta} \\ &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= [F(t)]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \\ &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt. \quad \square \end{aligned}$$

On peut appliquer ce résultat de deux manières différentes :

1) Soit à calculer $\int_a^b f(t) dt$:

a) Poser le changement de variable $t = \varphi(x)$.

b) Exprimer dt en fonction de dx en écrivant comme en physique : $t = \varphi(x)$ donc $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x)$ et $dt = \varphi'(x) dx$.

c) Changer les bornes : trouver α et β tels que $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ et $\varphi([\alpha, \beta]) = [a, b]$.

d) La proposition donne $\int_a^b f(t) dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x) dx$.

Exemple : Soit à calculer $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$. On effectue le changement de variable $t = \sin x$ avec $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On a alors $dt = \cos x dx$, et :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 x} \cos x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx \\ &= \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

2) Si on reconnaît une intégrale de la forme $\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x) dx$:

a) Poser le changement de variable $t = \varphi(x)$.

b) Exprimer dt en fonction de dx : $t = \varphi(x)$ donc $dt = \varphi'(x) dx$.

c) Changer les bornes : $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

d) La proposition donne $\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

Exemple : Soit à calculer $\int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$. On effectue le changement de variable $y = e^x$. On a alors $dy = e^x dx$, et on voit que l'on peut faire apparaître dy dans l'intégrale en multipliant numérateur et dénominateur par e^x :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx &= \int_0^1 \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} \\ &= \int_1^e \frac{dy}{y^2 + 1} \\ &= [\text{Arctan } y]_1^e \\ &= \text{Arctan } e - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Noter qu'on pouvait aussi exprimer x en fonction de y ($x = \ln y$) pour calculer dx .

On peut également utiliser le changement de variable pour calculer des primitives, mais il faut alors que le changement de variable soit bijectif car à la fin du calcul il faut revenir à la première variable.

Exemple : Déterminons une primitive de $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ sur $I =]-1, +\infty[$. On va poser $y = \sqrt{x+1}$. Alors :

$$y = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow y^2 = x+1 \Leftrightarrow x = y^2 - 1,$$

donc le changement de variable est bien bijectif. On a alors $dx = 2y dy$, donc :

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \int \frac{y^2-1}{y} 2y dy \\
&= 2 \int (y^2-1) dy \\
&= \frac{2y^3}{3} - 2y \\
&= \frac{2\sqrt{x+1}^3}{3} - 2\sqrt{x+1}.
\end{aligned}$$

On aurait pu également calculer cette primitive en écrivant $\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{x+1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ou en intégrant par parties.

5 Exemples de calculs de primitives

• PRIMITIVES USUELLES

Les primitives usuelles se déduisent des dérivées usuelles.

$f(x)$	$\int f(x) dx$	Intervalle de validité
$x^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$]0, +\infty[$ ou $] -\infty, 0[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln \cos x $	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$

$f(x)$	$\int f(x) dx$	Intervalle de validité
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$	$] k\pi, (k+1)\pi[$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arcsin} x$	$] -1, 1[$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Arctan} x$	$\mathbb{R}$

Remarques :

1) Souvent, pour déterminer une primitive d'une fonction f , on essaiera de trouver une fonction dont la dérivée est égale à f à une constante multiplicative près : il suffira alors de diviser cette fonction par la constante.

Soit par exemple $f(x) = (3x-1)^4$. On sait que la dérivée de $x \mapsto (3x-1)^5$ est $x \mapsto 5 \times (3x-1)^4 \times 3 = 15 \times (3x-1)^4$, donc une primitive de f est $x \mapsto \frac{(3x-1)^5}{15}$.

2) Il faut savoir reconnaître les dérivées de fonctions composées : $\frac{u'}{u} = (\ln u)'$, $uu' = \left(\frac{u^2}{2}\right)'$, $u'e^u = (e^u)'$, etc.

Exercice 2 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3} ; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x + \frac{\pi}{4}) dx ; \int_0^1 x e^{x^2} dx ; \int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} x}{1+x^2} dx ; \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

• PRIMITIVES DE $x \mapsto \frac{1}{x^2+bx+c}$

Soit le polynôme $P(x) = x^2 + bx + c$, où $b, c \in \mathbb{R}$, et soit Δ son discriminant.

1) Si $\Delta > 0$, alors P a deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 , et $P(x) = (x-x_1)(x-x_2)$. On cherche alors deux réels α et β tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{\alpha}{x-x_1} + \frac{\beta}{x-x_2},$$

ce qui est toujours possible (on l'admet), et il est alors facile d'obtenir une primitive.

2) Si $\Delta = 0$, alors P a une racine réelle double x_0 , et $P(x) = (x - x_0)^2$. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x - x_0)^2}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x - x_0}$.

3) Si $\Delta < 0$, l'idée est d'écrire $P(x)$ sous forme canonique $(x - p)^2 + q^2$, de mettre q^2 en facteur, puis de se ramener à une primitive de $\frac{1}{1 + y^2}$ à l'aide d'un changement de variable.

Exercice 3 Calculer :

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} ; \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4} ; \int \frac{dx}{x^2 + x + 1}.$$

• PRIMITIVES DE $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ ET DE $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$

Il y a deux méthodes possibles :

1) On peut chercher une primitive de $x \mapsto e^{(a+ib)x}$ et prendre la partie réelle ou la partie imaginaire.

2) On peut intégrer deux fois par parties.

Exercice 4 Calculer $\int e^{3x} \cos(2x) dx$ et $\int e^{3x} \sin(2x) dx$.

II Équations différentielles linéaires du premier ordre

1 Définition

Définition 3 Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation différentielle de la forme

$$(E) : a(x)y' + b(x)y = c(x),$$

où a , b et c sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Résoudre ou intégrer (E) sur I , c'est déterminer toutes les fonctions $y : I \rightarrow \mathbb{C}$ dérivables sur I et telles que $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$ pour tout $x \in I$. Une telle fonction est appelée **solution** de (E) sur I .

L'équation (E) est dite **homogène** ou **sans second membre** si c est la fonction nulle.

Remarques :

1) Le terme *linéaire* utilisé pour désigner ces équations vient du fait que si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation homogène $(E_0) : a(x)y' + b(x)y = 0$, alors les combinaisons linéaires $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ (où $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$) le sont aussi. Ce sera revu plus en détail ultérieurement.

2) Si la fonction a ne s'annule pas sur I , alors l'équation (E) est équivalente à l'équation $y' + \frac{b(x)}{a(x)}y = \frac{c(x)}{a(x)}$. Dans la suite de ce paragraphe on étudiera donc les équations de la forme :

$$y' + a(x)y = b(x),$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

2 Résolution de l'équation homogène $(E_0) : y' + a(x)y = 0$

Théorème 7 Les solutions sur I de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$, où $a : I \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue sur I , sont les fonctions $y : I \rightarrow \mathbb{C}$ définies par :

$$y(x) = \lambda e^{-A(x)},$$

où A est une primitive de a sur I et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Démonstration :

La fonction a est continue sur I donc elle y admet des primitives. Soit A une telle primitive.

Soit $y : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I . Alors ye^A est dérivable et sa dérivée est $y'e^A + aye^A = e^A(y' + ay)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
y' + ay = 0 &\Leftrightarrow e^A(y' + ay) = 0 \\
&\Leftrightarrow (ye^A)' = 0 \\
&\Leftrightarrow ye^A \text{ est constante} \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, ye^A = \lambda \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, y = \lambda e^{-A}.
\end{aligned}$$

Les solutions de (E_0) sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$. $\square$

Remarques :

- 1) Cette formule est à savoir.
- 2) Si a est à valeurs réelles et que l'on cherche uniquement les solutions à valeurs réelles, il suffit de prendre $\lambda \in \mathbb{R}$.
- 3) Les solutions sont les fonctions proportionnelles à $\psi : x \mapsto e^{-A(x)}$. On dit que l'ensemble des solutions est la *droite vectorielle* engendrée par ψ (cf chapitre sur les espaces vectoriels).

Si la fonction a est constante, les solutions de l'équation $y' + ay = 0$ sont particulièrement simples :

Corollaire 8 Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ (où $a \in \mathbb{C}$) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \lambda e^{-ax}$, où $\lambda \in \mathbb{C}$.

Exercice 5 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(x^2 + 1)y' + y = 0$. On donnera les solutions à valeurs réelles.

3 Résolution de l'équation avec second membre $(E) : y' + a(x)y = b(x)$

• ETUDE THÉORIQUE

Théorème 9 Les solutions sur I de l'équation différentielle $(E) : y' + a(x)y = b(x)$, où $a, b : I \rightarrow \mathbb{C}$ sont des fonctions continues sur I , sont les fonctions $y : I \rightarrow \mathbb{C}$ définies par

$$y(x) = F(x)e^{-A(x)} + \lambda e^{-A(x)}$$

où A est une primitive de a sur I , F est une primitive de be^A sur I et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Démonstration :

Soit A une primitive de a sur I . Soit $y : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I . Alors ye^A est dérivable et sa dérivée est $y'e^A + aye^A = e^A(y' + ay)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
y' + ay = b &\Leftrightarrow e^A(y' + ay) = be^A \\
&\Leftrightarrow (ye^A)' = be^A \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, ye^A = F + \lambda \text{ où } F \text{ est une primitive de } be^A \text{ sur } I \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, y = Fe^{-A} + \lambda e^{-A}. \square
\end{aligned}$$

Remarques :

- 1) Si a et b sont à valeurs réelles et que l'on ne cherche que les solutions à valeurs réelles, il suffit de prendre $\lambda \in \mathbb{R}$.
- 2) Cette formule n'est *pas* à savoir. C'est un résultat théorique qui nous dit qu'il y a toujours des solutions et quelle forme elles ont. On va voir maintenant comment résoudre en pratique une équation de ce type.

Théorème 10 Si on connaît une solution particulière y_1 de (E) , on obtient toutes les solutions de (E) en ajoutant à y_1 les solutions de l'équation sans second membre associée à (E) .

Démonstration :

y_1 est une solution de (E) , donc $y_1' + ay_1 = b$. Soit y une fonction dérivable sur I . Alors :

$$\begin{aligned}
y' + ay = b &\Leftrightarrow y' + ay = y_1' + ay_1 \\
&\Leftrightarrow (y - y_1)' + a(y - y_1) = 0 \\
&\Leftrightarrow y - y_1 \text{ est solution de } (E_0) \\
&\Leftrightarrow \exists y_0 \text{ solution de } (E_0), y = y_1 + y_0. \square
\end{aligned}$$

On retiendra :

Solution générale de (E) = solution particulière de (E) + solution générale de (E_0)

• MÉTHODE PRATIQUE DE RÉOLUTION DE $(E) : y' + a(x)y = b(x)$

1) On résout l'équation sans second membre $(E_0) : y' + a(x)y = 0$ (cf théorème 8).

2) On cherche une solution particulière de (E) .

– On regarde s'il y en a une évidente (solution constante par exemple).

– Si la fonction a est constante et que b est d'une forme particulière on utilise les méthodes de la page 8.

– Sinon on utilise la **méthode de variation de la constante** : on choisit une solution ψ de (E_0) qui ne s'annule pas et on cherche une solution de (E) sous la forme $y = z\psi$.

3) Le théorème 10 permet de conclure : on obtient la solution générale de (E) en additionnant la solution trouvée en 2) et la solution générale de (E_0) trouvée en 1).

• EXEMPLES

Dans les exemples suivants, on cherche les solutions à valeurs réelles.

Exemple 1 : Résoudre $(E) : y' + xy = x$.

1) **Résolution de l'équation homogène $(E_0) : y' + xy = 0$**

On a $\int x dx = \frac{x^2}{2}$ donc les solutions de (E_0) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) **Recherche d'une solution particulière de (E)**

On remarque que la fonction constante $x \mapsto 1$ est solution de (E) .

3) **Conclusion**

Les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = 1 + \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple 2 : Résoudre $(E) : (1 + x^2)y' + 2xy = x^2$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $1 + x^2 \neq 0$, donc on peut diviser par $1 + x^2$. L'équation (E) est donc équivalente à l'équation

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{x^2}{1+x^2},$$

qui est de la forme $y' + a(x)y = b(x)$.

1) **Résolution de l'équation homogène $(E_0) : y' + \frac{2x}{1+x^2}y = 0$**

On a $\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \ln(1+x^2)$ (on reconnaît une forme $\frac{u'}{u}$) et $e^{-\ln(1+x^2)} = \frac{1}{e^{\ln(1+x^2)}} = \frac{1}{1+x^2}$ donc les solutions de l'équation sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \frac{\lambda}{1+x^2}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) **Recherche d'une solution particulière de (E)**

Il n'y a pas de solution particulière évidente ici. Pour en trouver une on utilise la méthode de variation de la constante.

Posons $\psi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (solution de (E_0) qui ne s'annule pas). Soit z une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Posons $y = z\psi$. Alors y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $y' = z'\psi + z\psi'$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y'(x) + \frac{2x}{1+x^2}y(x) &= \frac{x^2}{1+x^2} \Leftrightarrow z'(x)\psi(x) + z(x)\psi'(x) + \frac{2x}{1+x^2}z(x)\psi(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \\ &\Leftrightarrow z'(x)\psi(x) + z(x) \underbrace{\left(\psi'(x) + \frac{2x}{1+x^2}\psi(x) \right)}_{=0 \text{ } (\psi \text{ sol. de } (E_0))} = \frac{x^2}{1+x^2} \\ &\Leftrightarrow z'(x)\psi(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \\ &\Leftrightarrow z'(x) \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \\ &\Leftrightarrow z'(x) = x^2. \end{aligned}$$

On peut prendre $z(x) = \frac{x^3}{3}$. Comme on a posé $y = z\psi$, on en déduit que la fonction y définie par $y(x) = \frac{x^3}{3(1+x^2)}$ est une solution particulière de (E) .

3) Conclusion

Les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = \frac{x^3}{3(1+x^2)} + \frac{\lambda}{1+x^2}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarques :

1) Si on a une équation de la forme $a(x)y' + b(x)y = c(x)$, et que l'on veut diviser par $a(x)$, il faut vérifier que l'on travaille sur un intervalle où a ne s'annule pas. D'autre part, on n'oubliera pas de diviser également le second membre par $a(x)$.

2) On simplifie au maximum l'expression des solutions de (E_0) avant de continuer, en particulier quand il y a comme ici du $\ln$ dans la primitive.

3) Dans la méthode de variation de la constante, il est inutile de remplacer ψ par sa valeur avant la fin.

4) Une fois qu'on a trouvé z , on n'oublie pas de multiplier par ψ , car c'est y que l'on cherche.

5) Le résultat final est toujours de la forme $y(x) = \dots + \lambda \dots$, et on n'oublie pas de préciser que $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Exercice 6 Résoudre $(E) : xy' - 2y = x$ sur $I =]0, +\infty[$.

Exercice 7 Résoudre $(E) : (\operatorname{ch} x)y' + (\operatorname{sh} x)y = 1$.

• CAS PARTICULIER : ÉQUATION À COEFFICIENTS CONSTANTS

Dans le cas où l'équation est à coefficients constants, i.e. de la forme :

$$(E) : y' + ay = b(x),$$

où $a \in \mathbb{C}$, et pour certains types de seconds membres, on peut utiliser les méthodes suivantes pour déterminer une solution particulière de (E) .

1) Si le second membre est un polynôme, on peut chercher une solution polynomiale de même degré.

Exercice 8 Résoudre $(E) : y' - 2y = x^2$.

2) Si le second membre est de la forme $P(x)e^{\alpha x}$, où P est un polynôme de degré n et $\alpha \in \mathbb{C}$, on peut chercher une solution de la forme $y(x) = Q(x)e^{\alpha x}$ avec Q de degré n si $\alpha \neq -a$, de degré $n+1$ si $\alpha = -a$ (i.e. si $x \mapsto e^{\alpha x}$ est solution de l'équation homogène).

Exercice 9 Résoudre $(E_1) : y' - 2y = xe^x$ puis $(E_2) : y' - 2y = xe^{2x}$.

3) Si $a \in \mathbb{R}$ et que le second membre est de la forme $P(x)\cos \omega x$ ou $P(x)\sin \omega x$, où P est un polynôme à coefficients réels, on commence par chercher une solution particulière de l'équation $y' + ay = P(x)e^{i\omega x}$ et on en prend la partie réelle (pour $P(x)\cos \omega x$) ou la partie imaginaire (pour $P(x)\sin \omega x$). Si P est constant, on peut aussi chercher directement une solution de la forme $\alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$.

Exercice 10 Résoudre $(E) : y' - 2y = \sin 3x$.

Remarque : Ces techniques ne marchent qu'avec des équations à *coefficients constants*.

4 Solution satisfaisant à une condition initiale

Définition 4 Soient $a, b : I \rightarrow \mathbb{C}$ des fonctions continues sur I , $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{C}$. On dit que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une solution de l'équation $(E) : y' + a(x)y = b(x)$ satisfaisant à la **condition initiale** $y(x_0) = y_0$ si f est solution de (E) et que $f(x_0) = y_0$.

On dit aussi que f est une solution au **problème de Cauchy** $\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.

Interprétation graphique (cas réel) : cela revient à demander que la courbe représentative de la solution passe par le point de coordonnées (x_0, y_0) .

Théorème 11 Il existe une unique solution au problème de Cauchy $\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.

Démonstration :

Posons $A(x) = \int_{x_0}^x a(t)dt$ et $F(x) = \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)}dt$ pour tout $x \in I$. Les fonctions A et F sont des primitives de a et be^A respectivement, et elles s'annulent en x_0 . D'après le théorème 9, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto F(x)e^{-A(x)} + \lambda e^{-A(x)}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit y une telle fonction. Alors $y(x_0) = F(x_0)e^{-A(x_0)} + \lambda e^{-A(x_0)} = \lambda$ puisque $F(x_0) = 0$ et que $e^{-A(x_0)} = e^0 = 1$.

Par conséquent $y(x_0) = y_0$ si et seulement si $\lambda = y_0$. Il y a donc une solution unique au problème de Cauchy donné. $\square$

Exemple : Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} (1+x^2)y' + 2xy = x^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$.

On a vu que les solutions de l'équation $(1+x^2)y' + 2xy = x^2$ sont définies par $y(x) = \frac{x^3}{3(1+x^2)} + \frac{\lambda}{1+x^2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors $y(1) = \frac{1}{6} + \frac{\lambda}{2}$, donc : $y(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$.

La solution cherchée est donc la fonction définie par $y(x) = \frac{x^3}{3(1+x^2)} - \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{x^3-1}{3(1+x^2)}$.

5 Principe de superposition

Proposition 12 Soit l'équation différentielle $(E) : y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$, où $a, b_1, b_2 : I \rightarrow \mathbb{C}$ sont continues sur I . Si y_1 est solution de $(E_1) : y' + a(x)y = b_1(x)$ et que y_2 est solution de $(E_2) : y' + a(x)y = b_2(x)$, alors $y_1 + y_2$ est solution de (E) .

Démonstration : On a $y_1' + ay_1 = b_1$ et $y_2' + ay_2 = b_2$, donc $(y_1 + y_2)' + a(y_1 + y_2) = b_1 + b_2$. $\square$

Si on peut trouver facilement des solutions particulières pour les équations (E_1) et (E_2) , on obtient une solution particulière de (E) en les additionnant.

Exercice 11 Résoudre $(E) : y' - 2y = x^2 + \sin 3x$.

III Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

1 Définitions

Définition 5 Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est une équation différentielle de la forme :

$$(E) : ay'' + by' + cy = f(x),$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$ (avec $a \neq 0$) et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue sur I .

Résoudre (E) sur I , c'est déterminer toutes les fonctions $y : I \rightarrow \mathbb{C}$ deux fois dérivables sur I et telles que $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$. Une telle fonction est appelée **solution** de (E) sur I .

L'équation (E) est dite **homogène** ou **sans second membre** si f est la fonction nulle.

L'équation sans second membre associée à (E) est l'équation :

$$(E_0) : ay'' + by' + cy = 0.$$

2 Résolution de l'équation homogène $(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$

Définition 6 On appelle **équation caractéristique** de (E_0) l'équation (d'inconnue $r \in \mathbb{C}$) :

$$(e) : ar^2 + br + c = 0.$$

Théorème 13 Soit l'équation différentielle $(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Soient (e) l'équation caractéristique de (E_0) et Δ le discriminant de (e) .

Si $\Delta = 0$, alors les solutions de (E_0) sont les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définies par

$$y(x) = (\alpha x + \beta)e^{r_0 x},$$

où r_0 est la racine double de (e) et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Si $\Delta \neq 0$, alors les solutions de (E_0) sont les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définies par

$$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x},$$

où r_1 et r_2 sont les racines de (e) et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Démonstration :

– Première étape : recherche des solutions exponentielles de (E_0)

On a vu que les solutions des équations du premier ordre à coefficients constants étaient des fonctions exponentielles. On peut conjecturer que c'est également le cas pour les équations du second ordre.

Soit donc $r \in \mathbb{C}$ et soit la fonction $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $y(x) = e^{rx}$. y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'(x) = r e^{rx}$ et $y''(x) = r^2 e^{rx}$. Alors :

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy = 0 &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, ar^2 + br + c = 0 \\ &\Leftrightarrow ar^2 + br + c = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, y est solution de (E_0) si et seulement si r est racine de l'équation caractéristique (e) . Si $\Delta = 0$, (e) a une racine (double) r_0 , donc la fonction exponentielle $x \mapsto e^{r_0 x}$ est solution de (E_0) . Si $\Delta \neq 0$, (e) a deux racines distinctes r_1 et r_2 , donc les fonctions exponentielles $x \mapsto e^{r_1 x}$ et $x \mapsto e^{r_2 x}$ sont solutions de (E_0) .

– Deuxième étape : recherche des autres solutions de (E_0)

Soit r une racine de (e) . Soit $\psi : x \mapsto e^{rx}$ une solution exponentielle de (E_0) . Elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Posons $y = z\psi$ (i.e. $z = \frac{y}{\psi}$). Alors z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $y' = z'\psi + z\psi'$ et $y'' = z''\psi + 2z'\psi' + z\psi''$, et :

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy = 0 &\Leftrightarrow a(z''\psi + 2z'\psi' + z\psi'') + b(z'\psi + z\psi') + cz\psi = 0 \\ &\Leftrightarrow az''\psi + (2a\psi' + b\psi)z' + \underbrace{(a\psi'' + b\psi' + c\psi)}_{=0} z = 0 \\ &\Leftrightarrow az''\psi + (2a\psi' + b\psi)z' = 0 \\ &\Leftrightarrow (az'' + (2a\psi' + b\psi)z')\psi = 0 \\ &\Leftrightarrow az'' + (2a\psi' + b\psi)z' = 0 \\ &\Leftrightarrow z'' + \left(2r + \frac{b}{a}\right)z' = 0 \end{aligned}$$

Il n'y a plus de z : en posant $Z = z'$, on obtient l'équation du premier ordre $Z' + \left(2r + \frac{b}{a}\right)Z = 0$. Les solutions de cette équation sont les fonctions Z définies par $Z(x) = \lambda e^{-(2r + \frac{b}{a})x}$, où $\lambda \in \mathbb{C}$.

On va maintenant distinguer les cas $\Delta = 0$ et $\Delta \neq 0$.

Premier cas : $\Delta = 0$. Alors $r = -\frac{b}{2a}$, donc $-(2r + \frac{b}{a}) = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy = 0 &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, z'(x) = \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, z(x) = \lambda x + \mu \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = (\lambda x + \mu)e^{rx} \end{aligned}$$

Deuxième cas : $\Delta \neq 0$. Alors $r = \frac{-b+\delta}{2a}$ où δ est une des racines carrées de Δ , donc $-(2r + \frac{b}{a}) = -\frac{\delta}{a} \neq 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy = 0 &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, z'(x) = \lambda e^{-\frac{\delta}{a}x} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda, \beta \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, z(x) = -\lambda \frac{a}{\delta} e^{-\frac{\delta}{a}x} + \beta \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, z(x) = \alpha e^{-\frac{\delta}{a}x} + \beta \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \alpha e^{(r - \frac{\delta}{a})x} + \beta e^{rx} \end{aligned}$$

Or $r - \frac{\delta}{a} = \frac{-b-\delta}{2a}$: c'est l'autre racine de (e) . Par conséquent :

$$ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x},$$

où r_1 et r_2 sont les racines de (e) . $\square$

Remarque : Les solutions sont les combinaisons linéaires des fonctions $x \mapsto e^{r_0 x}$ et $x \mapsto x e^{r_0 x}$ si $\Delta = 0$, ou des fonctions $x \mapsto e^{r_1 x}$ et $x \mapsto e^{r_2 x}$ si $\Delta \neq 0$. On dit que l'ensemble des solutions de (E_0) est un *plan vectoriel*.

Exercice 12 Résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' - iy' + 2y = 0$.

3 Résolution de (E_0) dans le cas réel

Théorème 14 Soit l'équation différentielle $(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Soient (e) l'équation caractéristique de (E_0) et Δ le discriminant de (e) .

Si $\Delta > 0$, alors les solutions de (E_0) à valeurs réelles sont les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x},$$

où r_1 et r_2 sont les racines de (e) et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Si $\Delta = 0$, alors les solutions de (E_0) à valeurs réelles sont les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$y(x) = (\alpha x + \beta) e^{r_0 x},$$

où r_0 est la racine double de (e) et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Si $\Delta < 0$, alors les solutions de (E_0) à valeurs réelles sont les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$y(x) = \alpha e^{px} \cos(qx) + \beta e^{px} \sin(qx),$$

où $p + iq$ et $p - iq$ ($p, q \in \mathbb{R}$) sont les racines de (e) et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Démonstration :

– Premier cas : $\Delta > 0$.

(e) a alors deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 , et (E_0) a pour solutions complexes les fonctions définies par $y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Puisque les fonctions $x \mapsto e^{r_1 x}$ et $x \mapsto e^{r_2 x}$ sont à valeurs réelles, on se convaincra aisément (par exemple en exprimant α et β en fonction de $y(0)$ et $y(1)$) que y est à valeurs réelles si et seulement si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

– Deuxième cas : $\Delta = 0$.

(e) a alors une racine réelle double r_0 , et (E_0) a pour solutions complexes les fonctions définies par $y(x) = (\alpha x + \beta) e^{r_0 x}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Puisque les fonctions $x \mapsto e^{r_0 x}$ et $x \mapsto x e^{r_0 x}$ sont à valeurs réelles, on se convaincra aisément (par exemple en exprimant α et β en fonction de $y(0)$ et $y(1)$) que y est à valeurs réelles si et seulement si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

– Troisième cas : $\Delta < 0$.

(e) a alors deux racines complexes conjuguées distinctes r_1 et r_2 , et (E_0) a pour solutions complexes les fonctions définies par $y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Cette fois les fonctions $x \mapsto e^{r_1 x}$ et $x \mapsto e^{r_2 x}$ ne sont pas à valeurs réelles. L'idée ici pour déterminer les solutions de (E_0) à valeurs réelles est d'exprimer les exponentielles complexes sous forme algébrique.

Posons $r_1 = p + iq$ et $r_2 = p - iq$ (avec $p, q \in \mathbb{R}$). Alors :

$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha e^{(p+iq)x} + \beta e^{(p-iq)x} \\ &= \alpha e^{px+iqx} + \beta e^{px-iqx} \\ &= \alpha e^{px} e^{iqx} + \beta e^{px} e^{-iqx} \\ &= \alpha e^{px} (\cos(qx) + i \sin(qx)) + \beta e^{px} (\cos(qx) - i \sin(qx)) \\ &= (\alpha + \beta) e^{px} \cos(qx) + i(\alpha - \beta) e^{px} \sin(qx) \end{aligned}$$

Les fonctions $x \mapsto e^{px} \cos(qx)$ et $x \mapsto e^{px} \sin(qx)$ sont à valeurs réelles. On se convaincra, toujours par exemple en exprimant $\alpha + \beta$ et $i(\alpha - \beta)$ en fonction de $y(0)$ et $y(1)$, que y est à valeurs réelles si et seulement si $\alpha + \beta$ et $i(\alpha - \beta)$ sont des réels.

Les solutions de (E_0) à valeurs réelles sont donc de la forme $y(x) = \lambda e^{px} \cos(qx) + \mu e^{px} \sin(qx)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et toutes les fonctions de ce type sont solutions de (E_0) car pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ il existe un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda = \alpha + \beta$ et $\mu = i(\alpha - \beta)$. $\square$

Exercice 13 Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} (E_1) &: y'' - 5y' + 6y = 0 \\ (E_2) &: y'' + 2y' + y = 0 \\ (E_3) &: y'' + 2y' + 5y = 0 \end{aligned}$$

On cherche les solutions à valeurs réelles.

4 Résolution de l'équation avec second membre

On note toujours $(E) : ay'' + by' + cy = f(x)$ et $(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$.

• PRINCIPE

Le principe de la résolution est le même que pour les équations du premier ordre :

Théorème 15 Si on connaît une solution particulière y_1 de (E) , on obtient toutes les solutions de (E) en ajoutant à y_1 les solutions de l'équation sans second membre associée à (E) .

Démonstration :

y_1 est une solution de (E) , donc $ay_1'' + by_1' + cy_1 = f$. Soit y une fonction dérivable sur I . Alors :

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy = f &\Leftrightarrow ay'' + by' + cy = ay_1'' + by_1' + cy_1 \\ &\Leftrightarrow a(y - y_1)'' + b(y - y_1)' + c(y - y_1) = 0 \\ &\Leftrightarrow y - y_1 \text{ est solution de } (E_0) \\ &\Leftrightarrow \exists y_0 \text{ solution de } (E_0), y = y_1 + y_0. \square \end{aligned}$$

On retiendra :

Solution générale de (E) = solution particulière de (E) + solution générale de (E_0)

On va maintenant voir comment déterminer une solution particulière de (E) pour certains types de seconds membres.

• CAS OÙ LE SECOND MEMBRE EST UN POLYNÔME

Proposition 16 Soit l'équation différentielle $(E) : ay'' + by' + cy = P(x)$, où $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ et P est un polynôme de degré n .

Si $c \neq 0$, alors (E) a une unique solution polynomiale de degré n .

Si $c = 0$ et $b \neq 0$, alors (E) a une infinité de solutions polynomiales de degré $n + 1$.

Si $c = b = 0$, alors (E) a une infinité de solutions polynomiales de degré $n + 2$.

Démonstration : On admet ce résultat. L'idée est la suivante :

Cherchons une solution particulière y polynomiale de degré p . Alors y' est de degré $p - 1$ et y'' de degré $p - 2$.

Si $c \neq 0$, alors $ay'' + by' + cy$ est de degré p : pour avoir $ay'' + by' + cy = P$, il faut que $p = n$.

Si $c = 0$ mais que $b \neq 0$, alors $ay'' + by' + cy = ay'' + by'$ est de degré $p - 1$: pour avoir $ay'' + by' + cy = P$, il faut que $p = n + 1$.

Si $c = b = 0$ (par hypothèse $a \neq 0$), alors $ay'' + by' + cy = ay''$ est de degré $p - 2$: pour avoir $ay'' + by' + cy = P$, il faut que $p = n + 2$.

On admet que ces solutions existent effectivement. $\square$

Exercice 14 Résoudre les équations différentielles suivantes (solutions à valeurs réelles) :

$$\begin{aligned} (E_1) &: y'' - 5y' + 6y = x^2 + 1 \\ (E_2) &: y'' + y' = x^2 + 1 \\ (E_3) &: y'' = x^2 + 1 \end{aligned}$$

• CAS OÙ LE SECOND MEMBRE EST DE LA FORME $P(x)e^{\alpha x}$

Proposition 17 Soit l'équation différentielle $(E) : ay'' + by' + cy = P(x)e^{\alpha x}$, où $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, P est un polynôme de degré n et $\alpha \in \mathbb{C}$. Soit (e) l'équation caractéristique de (E) .

Si α n'est pas racine de (e) , alors (E) a une unique solution de la forme $x \mapsto Q(x)e^{\alpha x}$, où Q est une fonction polynomiale de degré n .

Si α est racine simple de (e) , alors (E) a une infinité de solutions de la forme $x \mapsto Q(x)e^{\alpha x}$, où Q est une fonction polynomiale de degré $n + 1$.

Si α est racine double de (e) , alors (E) a une infinité de solutions de la forme $x \mapsto Q(x)e^{\alpha x}$, où Q est une fonction polynomiale de degré $n + 2$.

Démonstration :

Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Posons $y(x) = z(x)e^{\alpha x}$ (i.e. $z(x) = y(x)e^{-\alpha x}$). Alors z est également deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $y'(x) = z'(x)e^{\alpha x} + \alpha z(x)e^{\alpha x} = (z'(x) + \alpha z(x))e^{\alpha x}$, et $y''(x) = z''(x)e^{\alpha x} + 2\alpha z'(x)e^{\alpha x} + \alpha^2 z(x)e^{\alpha x} = (z''(x) + 2\alpha z'(x) + \alpha^2 z(x))e^{\alpha x}$. Alors :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = P(x)e^{\alpha x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, a(z''(x) + 2\alpha z'(x) + \alpha^2 z(x))e^{\alpha x} + b(z'(x) + \alpha z(x))e^{\alpha x} + cz(x)e^{\alpha x} = P(x)e^{\alpha x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (az''(x) + (2a\alpha + b)z'(x) + (a\alpha^2 + b\alpha + c)z(x))e^{\alpha x} = P(x)e^{\alpha x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, az''(x) + (2a\alpha + b)z'(x) + (a\alpha^2 + b\alpha + c)z(x) = P(x) \\ &\Leftrightarrow z \text{ solution de } (E') : az'' + (2a\alpha + b)z' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)z = P(x) \end{aligned}$$

Le second membre de l'équation (E') est une fonction polynomiale : on a vu au paragraphe précédent qu'on peut toujours trouver une solution polynomiale de (E') . De plus, $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ si et seulement si α est racine de (e) et $a\alpha^2 + b\alpha + c = 2a\alpha + b = 0$ si et seulement si α est racine double de (e) . La proposition 16 permet de conclure. $\square$

Exercice 15 Résoudre les équations différentielles suivantes (solutions à valeurs réelles) :

$$\begin{aligned}(E_1) &: y'' - 5y' + 6y = xe^x \\(E_2) &: y'' - 5y' + 6y = xe^{2x} \\(E_3) &: y'' + 2y' + y = xe^{-x}\end{aligned}$$

• CAS OÙ LE SECOND MEMBRE EST DE LA FORME $P(x)\cos\omega x$ OU $P(x)\sin\omega x$

Méthode générale : $\cos\omega x$ est la partie réelle de $e^{i\omega x}$ et $\sin\omega x$ est sa partie imaginaire. On peut donc commencer par chercher une solution de l'équation $ay'' + by' + cy = P(x)e^{i\omega x}$, et on prend la partie réelle de cette solution (pour $P(x)\cos\omega x$) ou sa partie imaginaire (pour $P(x)\sin\omega x$).

Cas particulier : si P est constant, on peut chercher une solution de la forme $x \mapsto \alpha \cos\omega x + \beta \sin\omega x$ (il y en a toujours une, sauf si $i\omega$ est racine de l'équation caractéristique, i.e. si l'équation homogène est de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$).

Exercice 16 Résoudre les équations différentielles suivantes (solutions à valeurs réelles) :

$$\begin{aligned}(E_1) &: y'' - 5y' + 6y = \cos x \\(E_2) &: y'' + y = \cos x\end{aligned}$$

• PRINCIPE DE SUPERPOSITION

Proposition 18 Soit l'équation différentielle $(E) : ay'' + by' + cy = f_1(x) + f_2(x)$, où $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, et $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{C}$ sont continues sur I . Si y_1 est solution de $(E_1) : ay'' + by' + cy = f_1(x)$ et que y_2 est solution de $(E_2) : ay'' + by' + cy = f_2(x)$, alors $y_1 + y_2$ est solution de (E) .

Démonstration : On a $ay_1'' + by_1' + cy_1 = f_1$ et $ay_2'' + by_2' + cy_2 = f_2$, donc $a(y_1 + y_2)'' + b(y_1 + y_2)' + c(y_1 + y_2) = f_1 + f_2$. $\square$

On peut ainsi trouver une solution particulière de toute équation dont le second membre est une somme de fonctions d'un des types précédemment étudiés : il suffit de trouver une solution particulière pour chacune de ces fonctions et de les additionner.

Exercice 17 Résoudre $(E) : y'' - 5y' + 6y = x^2 + 1 + xe^{2x} + \cos x$.

5 Solution satisfaisant à une condition initiale

On admet le théorème suivant :

Théorème 19 Soit $(E) : ay'' + by' + cy = f(x)$, où $a, b, c \in \mathbb{C}$ (avec $a \neq 0$) et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue sur I . Soient $x_0 \in I$ et $y_0, y'_0 \in \mathbb{C}$. Il existe une unique solution y de (E) sur I telle que $\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$.

On dit alors que y est la solution unique du **problème de Cauchy** $\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(x) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$.

Remarque : Pour avoir l'unicité de la solution d'une équation différentielle du second ordre, il faut donc *deux* conditions initiales : une sur la fonction inconnue et une autre sur sa dérivée.

Interprétation graphique (cas réel) : cela revient à demander que la courbe représentative de la solution passe par le point de coordonnées (x_0, y_0) , et que la pente de la tangente à la courbe en ce point soit égale à y'_0 .

Exercice 18 Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = \cos x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.