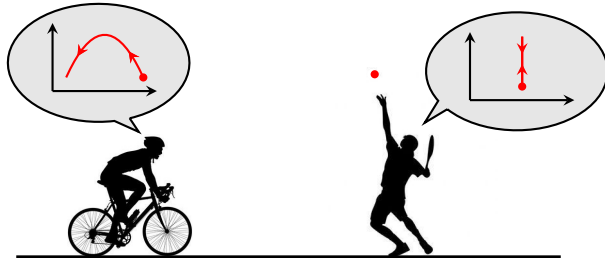


Chapitre 7 : Cinématique

1 Repérage d'un point dans l'espace et le temps

1.1 Référentiel



La trajectoire d'un mobile n'est pas la même du point de vue de deux observateurs en mouvement l'un par rapport à l'autre ; on dit que le mouvement est **relatif à un observateur**. C'est pourquoi, avant toute étude mécanique, il est indispensable de définir une **référence** pour le mouvement.

Référentiel

Un référentiel est un solide utilisé comme référence pour l'étude d'un mouvement. Il peut être un objet concret (le référentiel *terrestre* est lié à la Terre) ou bien être une abstraction (le référentiel *géocentrique* est lié à un trièdre imaginaire dont l'origine est au centre d'inertie de la Terre et dont les axes sont dirigés vers des étoiles lointaines).

1.2 Vecteur position

Soit P un point en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$ donné. On définit la position de P par le vecteur :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP}$$

avec O un point **fixe** de $\mathcal{R}$ choisi arbitrairement, appelé **l'origine**.

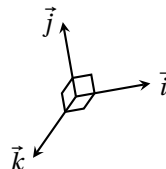


1.3 Base orthonormée directe

• Un **vecteur unitaire** a une norme égale à l'unité : $\|\vec{i}\| = 1$. C'est donc un vecteur **sans dimension**.

• Une **base orthonormée** est une famille de vecteurs unitaires orthogonaux les uns aux autres. En dimension 3 une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ peut être représentée graphiquement de la manière ci-contre, avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$.

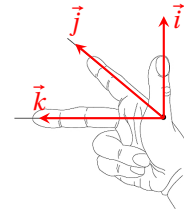
• Une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **directe** si elle vérifie la **règle des trois doigts de la main droite**.



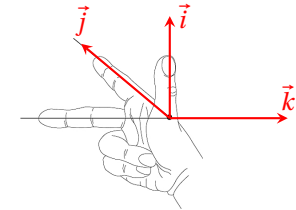
Base directe, règle des trois doigts de la main droite

On considère la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On indique la direction de $\vec{i}$ avec le pouce et celle de $\vec{j}$ avec l'index :

- si le majeur est dans le sens de $\vec{k}$ alors la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est directe.
- si le majeur est dans le sens contraire de $\vec{k}$ alors la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est indirecte.



base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ directe



base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ indirecte

En mécanique, par convention, on utilise uniquement des bases orthonormées directes.

Remarque : L'ordre des vecteurs est important lorsque l'on définit une base. Vous pouvez vérifier que si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base directe alors $(\vec{i}, \vec{k}, \vec{j})$ est indirecte.

1.4 Coordonnées, projections

Coordonnées d'un vecteur dans une base

Tout vecteur $\vec{A}$ s'écrit de manière **unique** en fonction des vecteurs $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'une base orthonormée directe :

$$\vec{A} = A_i \vec{i} + A_j \vec{j} + A_k \vec{k}$$

Les nombres A_i , A_j et A_k sont appelés les **coordonnées** de $\vec{A}$ dans la base $\mathcal{B}$. On utilise parfois les notations suivantes :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \end{pmatrix}$$

Projection d'un vecteur dans une base

On appelle **projection** l'opération qui consiste à déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{A}$ dans une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ donnée.

$$\vec{A} \xrightarrow{\text{projection de } \vec{A} \text{ dans la base } \mathcal{B}} (A_i, A_j, A_k)$$

En termes mathématiques une projection s'effectue avec des **produits scalaires** :

$$A_i = \vec{A} \cdot \vec{i} \quad , \quad A_j = \vec{A} \cdot \vec{j} \quad , \quad A_k = \vec{A} \cdot \vec{k}$$

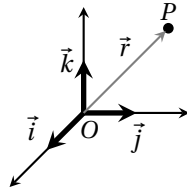
1.5 Repère

Repère

Un repère est un objet mathématique constitué :

- d'une origine O fixe dans le référentiel d'étude,
- d'une base orthonormée directe $\mathcal{B}$.

L'origine O permet de définir le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ et la base $\mathcal{B}$ permet de projeter tous les vecteurs utiles en mécanique (position, vitesse, accélération, force, etc).



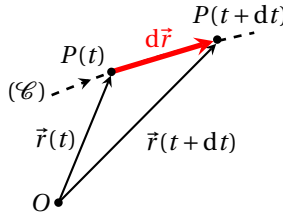
Remarque : Il existe différentes bases classiques en mécanique, selon la façon dont on veut définir les coordonnées du point P ; nous en discuterons dans la suite de ce chapitre.

1.6 Vecteur vitesse

1.6.1 vecteur déplacement élémentaire

On considère un point P en mouvement sur une trajectoire donnée ($\mathcal{C}$). Le déplacement du point P entre deux dates infiniment proches t et $t + dt$ est mesuré par le *vecteur déplacement élémentaire* : $d\vec{r} = \overrightarrow{P(t)P(t+dt)}$.

À l'aide d'une relation de Chasles on montre que ce vecteur s'identifie à la variation du vecteur position : $d\vec{r} = \vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)$.



1.6.2 vecteur vitesse instantanée

Le vecteur vitesse instantanée $\vec{v}$ est défini comme la dérivée temporelle du vecteur position. On peut également le voir comme le taux de variation du vecteur position entre deux dates infiniment proches :

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- La vitesse instantanée est toujours **tangente** à la trajectoire.
- On dit que le mouvement est **uniforme** si la vitesse en norme se conserve : $\|\vec{v}\| = \text{Cste} \neq 0$.
- Le mouvement est **rectiligne uniforme** si et seulement si le vecteur vitesse se conserve : $\vec{v} = \overrightarrow{\text{Cste}} \neq \vec{0}$.

1.7 Vecteur accélération

Le vecteur accélération $\vec{a}$ est défini comme la dérivée temporelle du vecteur vitesse. On peut également le voir comme le taux de variation du vecteur vitesse entre deux dates infiniment proches :

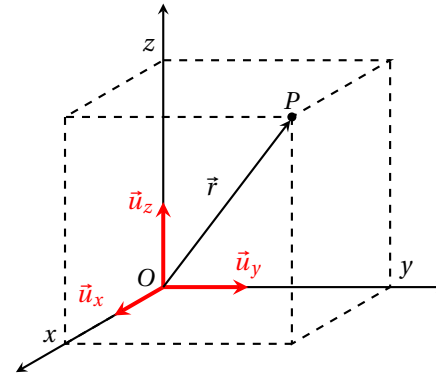
$$\vec{v} = \frac{\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

- Un point est au repos ou en mouvement rectiligne uniforme si et seulement si $\vec{a} = \vec{0}$.
- Un mouvement non rectiligne est accéléré ($\vec{a} \neq \vec{0}$), **même s'il est uniforme**.

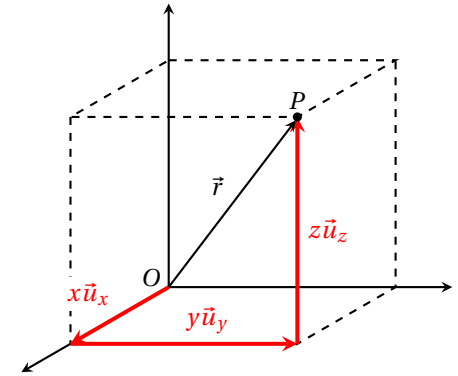
2 Systèmes de coordonnées

2.1 Coordonnées cartésiennes

2.1.1 Cas général à trois dimensions



Repère cartésien 3D



Représentation du vecteur position

Repère cartésien

Les vecteurs de la base cartésienne ($\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$) sont **fixes** et définissent les directions des trois axes d'un trièdre direct ($Oxyz$), appelé **repère cartésien**.

Coordonnées cartésiennes

- La coordonnée x mesure la distance algébrique qui sépare le point P du plan (Oyz).
- La coordonnée y mesure la distance algébrique qui sépare le point P du plan (Oxz).
- La coordonnée z mesure la distance algébrique qui sépare le point P du plan (Oxy).

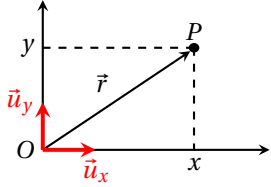
Vecteurs cinématiques cartésiens	
position	$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$
vitesse	$\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$
accélération	$\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$
déplacement élémentaire	$d\vec{r} = \vec{v}dt = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$

Remarque : Les vecteurs de la base cartésienne sont fixes donc $\frac{d\vec{u}_x}{dt} = \frac{d\vec{u}_y}{dt} = \frac{d\vec{u}_z}{dt} = \vec{0}$.

Remarque : Les coordonnées d'un point en mouvement varient au cours du temps ; il faut donc les voir comme **des fonctions du temps** : $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Pour alléger les expressions on symbolise la dérivée temporelle par un point au-dessus de la fonction à dériver (par exemple $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$).

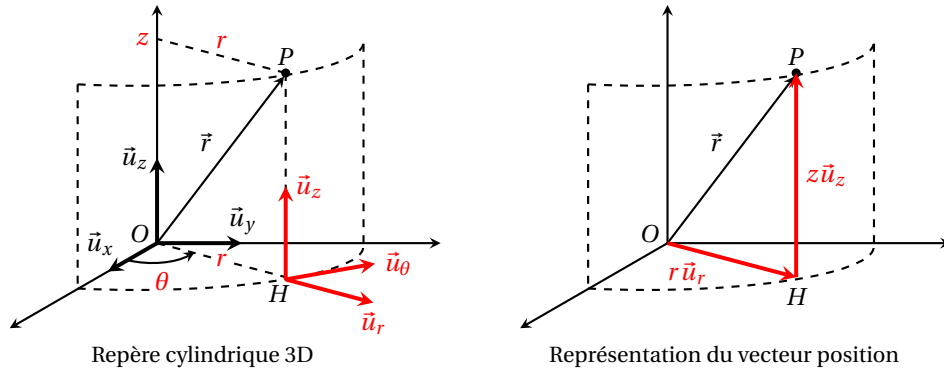
2.1.2 Cas 2D et 1D

- Pour un mouvement **plan** on peut se contenter d'un repère avec deux axes (donc deux coordonnées).
- Pour un mouvement **rectiligne** on peut se contenter d'un unique axe (donc une seule coordonnée).

Repère cartésien 2D (Mouvement plan)	Repère cartésien 1D (Mouvement rectiligne)
	
$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$	$\vec{r} = x\vec{u}_x$
$\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y$	$\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x$
$\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y$	$\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x$
$d\vec{r} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y$	$d\vec{r} = dx\vec{u}_x$

2.2 Coordonnées cylindro-polaires

2.2.1 Coordonnées cylindriques à trois dimensions



Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques (r, θ, z) sont définies en s'appuyant sur le repère cartésien :

- La coordonnée r mesure la distance qui sépare le point P de l'axe (Oz) .
- La coordonnée θ mesure la position angulaire du point P autour de l'axe (Oz) . L'axe (Ox) est choisi comme direction de référence ($\theta = 0$ si P est dans la direction de (Ox)).
- La coordonnée z est la même que dans le système cartésien.

Base cylindrique

On définit les vecteurs de la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ de la manière suivante :

- Le vecteur unitaire **axial** $\vec{u}_z$ est le même que celui de la base cartésienne.
- Le vecteur unitaire **radial** $\vec{u}_r$ est perpendiculaire à $\vec{u}_z$, dirigé selon θ et orienté dans le sens de la coordonnée r croissante.
- Le vecteur unitaire **orthoradial** $\vec{u}_\theta$ est perpendiculaire à $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$, orienté dans le sens de la coordonnée θ croissante.

On vérifie qu'avec cette définition la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est directe.

Dérivée temporelle des vecteurs mobiles

Contrairement au vecteur $\vec{u}_z$ qui est fixe, les vecteurs unitaires $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ **dépendent de la position angulaire** θ . Si le point P tourne autour de l'axe (Oz) alors ces vecteurs tournent avec lui, on dit que ce sont des **vecteurs mobiles** ; ils sont en quelque sorte "attachés" au point P . On admet l'expression de la dérivée temporelle des vecteurs mobiles :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$$

Remarque : La grandeur $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ s'appelle la **vitesse angulaire** du point P . Elle mesure (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$), la vitesse avec laquelle P tourne autour de l'axe (Oz) .

On exprime parfois la vitesse angulaire en tours par minute : $1 \text{ tr/min} = \frac{2\pi}{60} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

La grandeur $\ddot{\theta}$ s'appelle l'**accélération angulaire** (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$).

Vecteurs cinématiques cylindriques	
position	$\vec{r} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$
vitesse	$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$
accélération	$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$
déplacement élémentaire	$d\vec{r} = \vec{v}dt = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$

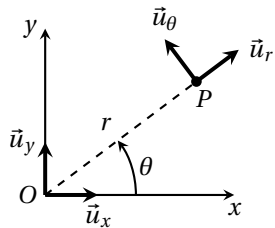
Remarque : Le calcul du vecteur vitesse s'effectue par dérivation du vecteur position :

$$\begin{aligned}
 \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) \\
 &= \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{\dot{r}} \vec{u}_r + r \underbrace{\frac{d\vec{u}_r}{dt}}_{\dot{\theta}\vec{u}_\theta} + \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{\dot{z}} \vec{u}_z + z \underbrace{\frac{d\vec{u}_z}{dt}}_{\vec{0}} \\
 &= \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z
 \end{aligned}$$

2.2.2 Coordonnées polaires à deux dimensions

Pour un mouvement plan on peut se limiter aux vecteurs de base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, qu'on appelle la **base polaire**. Les coordonnées (r, θ) sont appelées les coordonnées polaires du point P .

Vecteurs cinématiques polaires	
position	$\vec{r} = r \vec{u}_r$
vitesse	$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$
accélération	$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \vec{u}_\theta$
déplacement élémentaire	$d\vec{r} = \vec{v} dt = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$

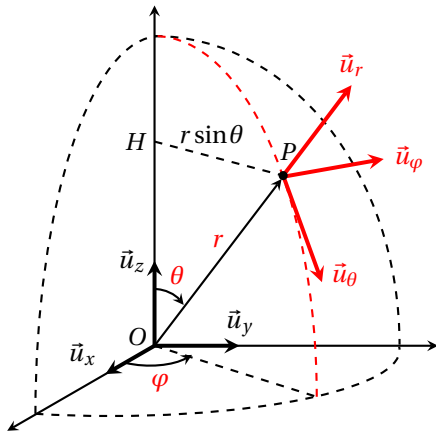


2.3 Coordonnées sphériques

Coordonnées sphériques

Les coordonnées cylindriques (r, θ, φ) sont définies en s'appuyant sur le repère cartésien :

- Le **rayon** r mesure la distance qui sépare le point P de l'origine O .
- L'**azimuth** φ mesure la position angulaire de P autour de l'axe (Oz) , avec comme direction de référence celle de l'axe (Ox) .
- La **colatitute** θ mesure la position angulaire de P autour du point O dans une direction orthogonale à l'azimuth, avec comme direction de référence celle de l'axe (Oz) .



Base sphérique

On définit les vecteurs de la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ de la manière suivante :

- Le vecteur unitaire radial $\vec{u}_r$ est dirigé selon $\vec{OP}$ et orienté dans le sens de la coordonnée r croissante.
- Le vecteur unitaire azimuthal $\vec{u}_\varphi$ est perpendiculaire à $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$, orienté dans le sens de la coordonnée φ croissante.
- Le vecteur unitaire orthoradial $\vec{u}_\theta$ est perpendiculaire à $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\varphi$, orienté dans le sens de la coordonnée θ croissante.

On vérifie qu'avec cette définition la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ est directe.

Remarque : Le seul vecteur cinématique à connaître en sphériques est le vecteur position : $\vec{r} = r \vec{u}_r$.

3 Applications

3.1 Mouvement rectigne uniforme et uniformément accéléré

Un conducteur roule à vitesse constante $v_0 = 100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ sur une route départementale rectiligne. Comme il est en excès de vitesse, un gendarme à moto démarre à l'instant où la voiture passe à sa hauteur et accélère uniformément. Le gendarme atteint la vitesse de $90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ au bout de 10 s.

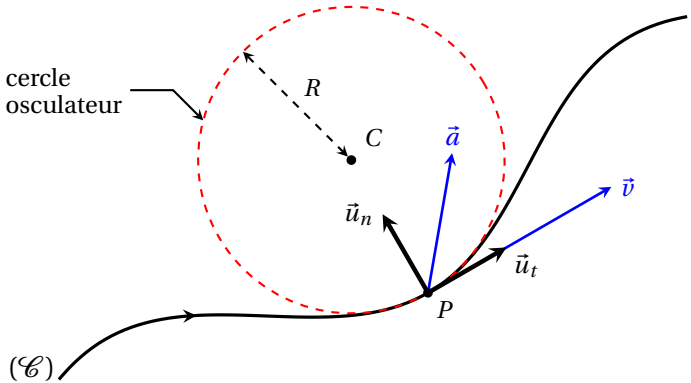
1. Quel sera le temps nécessaire au motard pour rattraper la voiture ?
2. Quelle distance aura-t-il parcouru ?
3. Quelle vitesse aura-t-il alors atteinte ?

3.2 Mouvement circulaire

1. Une personne est assise sur un manège de diamètre $D = 12 \text{ m}$, en rotation à la vitesse angulaire de 10 tours par minute. On étudie le mouvement dans le référentiel terrestre. Calculer sa vitesse et son accélération si elle se trouve à une distance de 3 m du centre.
2. On suppose à présent que la personne se déplace du centre vers la circonférence du manège pendant que ce dernier est en marche. Dans le référentiel du manège elle avance en ligne droite à la vitesse constante $v = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer sa vitesse dans le référentiel terrestre. Combien de tours effectue le manège avant que la personne atteigne le bord ?

4 Mouvement plan quelconque : repère de Frenet

On considère une trajectoire **plane** $(\mathcal{C})$ connue et régulière. La **base de Frenet** $(\vec{u}_n, \vec{u}_t)$ (qui devient un repère de Frenet si on lui associe une origine quelconque) est une base mobile qui "suit" le mouvement du point P .



Base de Frenet

On peut définir en tout point P de la trajectoire $(\mathcal{C})$:

- Le cercle osculateur : il s'agit de l'unique cercle situé dans le plan du mouvement, passant par P , dont la courbure épouse exactement celle de $(\mathcal{C})$. Son centre C est appelé le **centre de courbure** et son rayon R le **rayon de courbure** de $(\mathcal{C})$ au point P .
- Le vecteur unitaire normal $\vec{u}_n$: il s'agit du vecteur unitaire dirigé selon la **normale** à $(\mathcal{C})$ en P et orienté vers le centre de courbure.
- Le vecteur unitaire tangentielle $\vec{u}_t$: il s'agit du vecteur unitaire dirigé selon la **tangente** à $(\mathcal{C})$ en P et orienté dans le sens du déplacement.

Vecteurs cinématiques dans le repère de Frenet	
vitesse	$\vec{v} = \ \vec{v}\ \vec{u}_t$
accélération	$\vec{a} = \frac{\ \vec{v}\ ^2}{R} \vec{u}_n + \frac{d\ \vec{v}\ }{dt} \vec{u}_t$

Remarque : Pour un mouvement plan quelconque, l'accélération se décompose en une composante normale $\frac{\|\vec{v}\|^2}{R} \vec{u}_n$ et un composante tangentielle $\frac{d\|\vec{v}\|}{dt} \vec{u}_t$.

- Un mouvement rectiligne est tel que le rayon de courbure R est infini en tout point de la trajectoire donc $\frac{\|\vec{v}\|^2}{R} = 0$. À tout instant $\vec{a}$ est colinéaire à $\vec{v}$.
- Si le mouvement est uniforme alors $\frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = 0$ donc à tout instant $\vec{a}$ est orthogonal à $\vec{v}$.
- Pour un mouvement rectiligne et uniforme on retrouve $\vec{a} = \vec{0}$.

On remarquera également que l'on retrouve une expression de $\vec{a}$ cohérente avec celle obtenue en coordonnées polaires pour un mouvement circulaire non-uniforme (le vecteur $\vec{u}_r$ étant alors à tout instant égal à l'opposé de $\vec{u}_n$).

1. Un patineur zigzague à vitesse constante entre des plots en suivant une trajectoire sinusoïdale. Tracer son allure. En quels points l'accélération est-elle minimale ? maximale ?
2. Un pendule simple est constitué d'un fil de longueur ℓ constante accroché en un point fixe. À l'autre extrémité du fil se trouve une masse ponctuelle. On envisage les oscillations du pendule dans un plan vertical. Le fil est toujours tendu.
Tracer l'allure de la trajectoire suivie par la masse. Tracer l'allure de son vecteur vitesse et de son vecteur accélération :
 - a) lorsqu'elle est au point le plus bas de sa trajectoire.
 - b) lorsqu'elle est au sommet de sa trajectoire.
 - c) lorsqu'elle est en un point quelconque, en train de monter.
 - d) lorsqu'elle est en un point quelconque, en train de descendre.