

Corrigé DS2

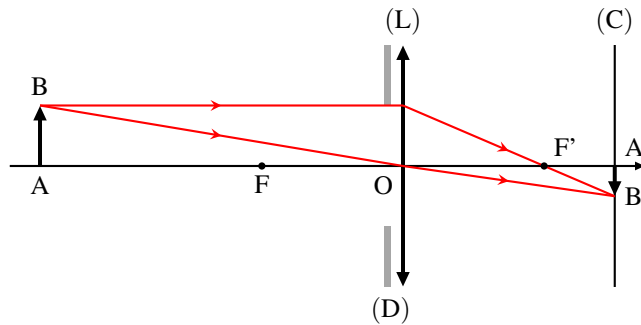
Exercice 1 : Utilisation d'un appareil photographique

1.a) On parle de conditions de Gauss quand on sélectionne uniquement des **rayons paraxiaux**, c'est-à-dire :

- peu inclinés par rapport à l'axe optique,
- proches de l'axe optique.

1.b) Le **diaphragme** permet de sélectionner uniquement les rayons paraxiaux.

2.a) On représente schématiquement la situation :



2.b) On utilise une relation de grandissement de la lentille :

$$\frac{\overline{A'B'}}{h} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FO} + \overline{OA}} \iff \overline{A'B'} = \frac{f'}{f' - L} h = -12,5 \text{ mm}$$

2.c) La taille de l'image de l'arbre est inférieure aux dimensions du capteur donc **il est possible de voir l'arbre en entier sur la photo**.

3.a) Lorsque l'objet à l'infini, son image par la lentille se trouve dans le **plan focal image**. Dans ce cas, $d_{\min} = f'$.

3.b) On écrit la relation de conjugaison de Descartes, avec $\overline{OA} = -L$ et $\overline{OA'} = d$:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{L} = \frac{1}{f'} \iff \frac{1}{d} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{L}$$

$$\iff d = \frac{Lf'}{L - f'}$$

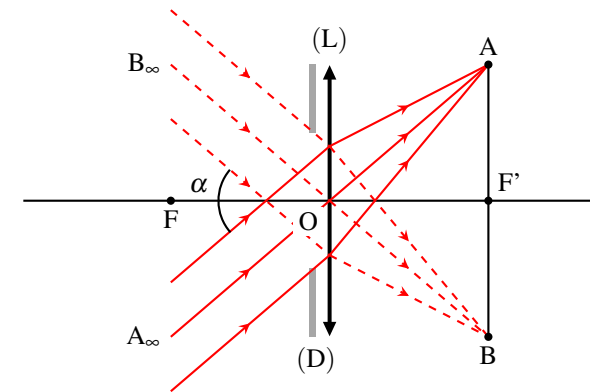
D'après cette relation quand la distance L diminue pour se rapprocher de f' alors la distance d augmente et tend vers $+\infty$. Cela signifie que **plus l'objet est proche du photographe et plus il faut éloigner le capteur de la lentille**. Il est dit dans l'énoncé que la distance d ne peut pas dépasser $d_{\max}$. Cela signifie qu'il y a nécessairement une distance L en-dessous de laquelle on ne pourra plus prendre l'objet en photo car **il sera impossible d'éloigner suffisamment le capteur de la lentille pour effectuer la mise au point**.

D'après le raisonnement précédent le point le plus proche qui peut être pris en photo est celui qui correspond à $d = d_{\max}$.

$$\frac{1}{d_{\max}} + \frac{1}{L_{\min}} = \frac{1}{f'} \iff L_{\min} = \frac{d_{\max} f'}{d_{\max} - f'}$$

3.c) L'application numérique donne $L_{\min} = 55 \text{ cm}$.

4.a) On trace la marche des rayons lumineux qui atteignent **les bords du capteur**. On voit qu'ils forment un cône centré sur l'axe optique. Tout rayon incident qui est en-dehors de ce cône n'atteint jamais le capteur.



On cherche à déterminer le champ angulaire α . Dans le triangle $OF'A'$ rectangle en O :

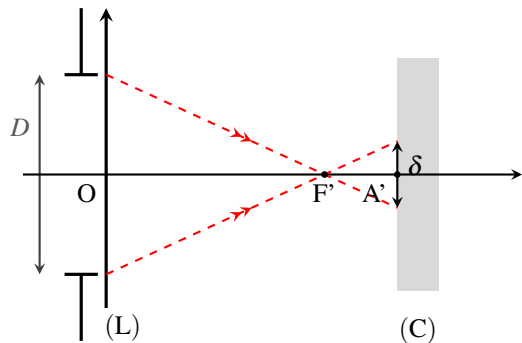
$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\ell/2}{f'} \iff \alpha = 2 \arctan\left(\frac{\ell}{2f'}\right)$$

4.b) Pour le côté de taille 24 mm on trouve un champ angulaire $\alpha = 27^\circ$. Pour le côté de taille 36 mm on trouve $\alpha = 40^\circ$.

4.c) Plus le champ angulaire est élevé et plus on aperçoit une large portion d'espace sur la photo. D'après le résultat de la question précédente le champ angulaire est une fonction décroissante de f' , ce qui signifie que pour avoir un "plan large" (champ angulaire élevé) on doit utiliser une petite distance focale tandis que pour avoir un "plan serré" (champ angulaire faible) on doit

utiliser une grande distance focale. En conclusion, **la photo 1 a été prise avec $f' = 50\text{mm}$ et la photo 2 avec $f' = 150\text{mm}$.**

5.a) On fait un zoom sur la partie droite du schéma :



On reconnaît deux triangles semblables et on applique le théorème de Thalès :

$$\frac{\delta}{D} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{OF'}} = \frac{\overline{F'A'}}{f'} \iff \overline{F'A'} = \frac{\delta f'}{D}$$

On exploite ensuite la relation de conjugaison de Newton :

$$\overline{FA} = -\frac{f'^2}{\overline{F'A'}} = -\frac{Df'}{\delta}$$

On termine le calcul avec une relation de Chasles :

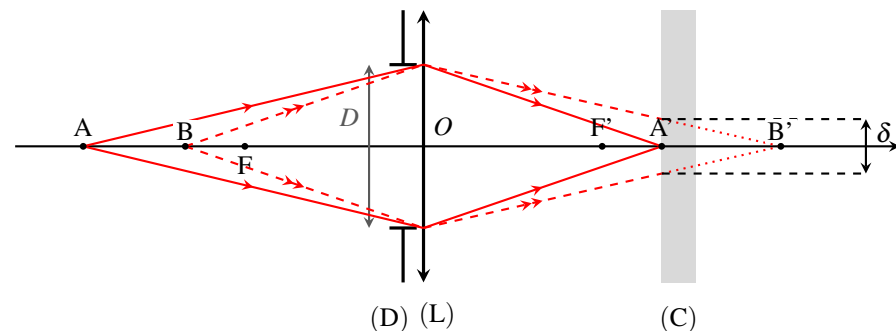
$$\begin{aligned} L_H &= -\overline{OA} = -(\overline{OF} + \overline{FA}) \\ &= f' + \frac{Df'}{\delta} \\ &= \boxed{f' \left(1 + \frac{D}{\delta} \right)} \end{aligned}$$

5.b) Notons S la surface totale du capteur et N le nombre de pixels. Sachant que la surface d'un seul pixel est égale à δ^2 , on a :

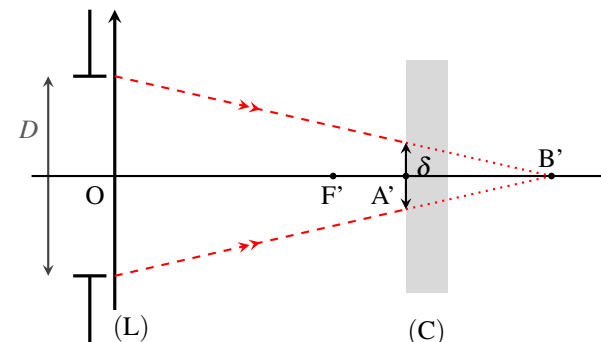
$$S = N\delta^2 \iff \boxed{\delta = \sqrt{\frac{S}{N}} = 5,4\text{ }\mu\text{m}}$$

5.c) On trouve $\boxed{L_H = 58\text{ m}}$.

6.a) On représente schématiquement la position du point B de l'axe optique le plus proche pouvant être vu net sur la photo.



On fait à nouveau un zoom sur la partie droite du schéma.



On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{\delta}{D} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OB'} - \overline{OA'}}{\overline{OB'}} = 1 - \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}$$

En passant à l'inverse on obtient :

$$\frac{D}{\delta} = \frac{1}{1 - \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}} = \frac{\frac{1}{\overline{OA'}}}{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OB'}}} \quad (E)$$

D'après le résultat de la question **Q5.a)** on a aussi :

$$L_H = f' \left(1 + \frac{D}{\delta} \right) \iff \frac{D}{\delta} = \frac{L_H}{f'} - 1$$

On écrit ensuite la relation de conjugaison de Descartes pour les couples de points conjugués (A, A') et (B, B') :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\overline{OA'}} + \frac{1}{L_H} &= \frac{1}{f'} \iff \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{L_H} \\ \frac{1}{\overline{OB'}} + \frac{1}{L} &= \frac{1}{f'} \iff \frac{1}{\overline{OB'}} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{L} \end{aligned}$$

On réinjecte dans l'équation (E) :

$$\begin{aligned} \frac{L_H}{f'} - 1 &= \frac{\frac{1}{f'} - \frac{1}{L_H}}{\frac{1}{L} - \frac{1}{L_H}} \iff \frac{L_H - f'}{f'} = \frac{L(L_H - f')}{f'(L_H - L)} \\ &\iff 1 = \frac{L}{L_H - L} \\ &\iff L_H - L = L \\ &\iff \boxed{L = \frac{L_H}{2}} \end{aligned}$$

6.b) D'après les résultats précédents si l'on fait le point sur l'hyperfocale alors on verra net (ou quasiment) tous les objets situés entre l'infini et $\frac{L_H}{2}$. Pour une photographie de paysage on cherche à avoir la distance hyperfocale **la plus courte possible** de manière à ce que les objets au premier plan soient vus nets. L'expression de L_H obtenue à la question **Q5.a)** montre que L_H diminue quand le diamètre du diaphragme D diminue. Par conséquent on aura avantage à choisir un diaphragme **le moins ouvert possible** en photographie de paysage ; le meilleur choix est $\boxed{D = f'/16}$.

6.c) C'est la **diffraction** de la lumière à travers le diaphragme qui provoque la dégradation de la qualité de l'image. En effet plus le diaphragme est fermé et plus les tâches de diffraction produites sur le capteur sont larges, ce qui nuit au stigmatisme de l'objectif. Dans les objectifs du commerce l'ouverture minimale est généralement égale à $f'/16$ ou bien $f'/32$. Il est inutile d'utiliser des diamètres plus faibles car les photos produites seraient beaucoup trop dégradées par la diffraction.

Remarque : vous avez appris au lycée que la diffraction est visible à l'œil nu lorsque la lumière rencontre un obstacle dont la taille est légèrement supérieure à la longueur d'onde, autrement de l'ordre de quelques microns. On pourrait penser que la diffraction produite par le diaphragme, dont le diamètre est de l'ordre du millimètre, est insignifiante. Il ne faut pas oublier que chaque pixel du capteur a une taille de l'ordre de quelques microns ! Il suffit que les tâches de diffraction aient une taille suffisante pour recouvrir plusieurs pixels et la dégradation de la qualité de la photo devient sensible.

Remarque : un autre problème apparaît lorsque l'on utilise un diaphragme très fermé. Le flux de lumière qui entre dans l'appareil diminue quand on ferme le diaphragme, donc pour avoir une photo de même luminosité il faut augmenter la durée pendant laquelle le diaphragme s'ouvre pour laisser la lumière éclairer le capteur (on l'appelle le "temps de pose"). Si le temps de pose est trop grand (de l'ordre d'un dixième de seconde ou plus) alors les mouvements involontaires du bras du photographe peuvent produire un "flou de bougé" sur la photo. On peut corriger cet effet en posant l'appareil sur un trépied ou bien en utilisant un stabilisateur, c'est-à-dire un dispositif électromécanique qui corrige en temps réel les mouvements de l'appareil pour maintenir le capteur aussi immobile que possible pendant la prise de vue.

Exercice 2 : Alimentation d'un moteur

1. On applique la loi des mailles : $E = RI + R_m I + E_m \iff \boxed{I = \frac{E - E_m}{R + R_m}}$.

Ensuite, on utilise la loi d'additivité des tensions : $\boxed{U = E_m + R_m I = \frac{ER_m + E_m R}{R_m + R}}$.

Enfin, on calcule la puissance reçue par le moteur : $\boxed{\mathcal{P}_r = UI = \frac{(E - E_m)(ER_m + E_m R)}{(R_m + R)^2}}$.

Numériquement, on obtient : $\boxed{I = 0,38 \text{ A}}$, $\boxed{U = 7,3 \text{ V}}$, $\boxed{\mathcal{P}_r = 2,8 \text{ W}}$.

2. La puissance reçue par la source idéale de tension E_m vaut : $\boxed{\mathcal{P}_m = E_m I = 1,9 \text{ W}}$ et le rendement vaut : $\boxed{\eta = \frac{E_m I}{UI} = \frac{E_m}{U} = 0,68}$. Le rendement du moteur est de $\boxed{68 \%}$.

3. Le moteur se comporte comme un récepteur électrique à condition que $\mathcal{P}_r \geq 0$. D'après le résultat de la question 4, on voit que cela n'est possible que si $E_m \leq E$. Par conséquent, la valeur maximale que l'on peut donner à E_m est $\boxed{E_{m,\max} = E}$.

4. On exprime la fonction $\mathcal{P}_m(E_m)$: $\mathcal{P}_m(E_m) = E_m I = \frac{(E - E_m)E_m}{R + R_m}$.

On calcule ensuite sa dérivée : $\mathcal{P}'_m(E_m) = \frac{E - 2E_m}{R + R_m}$.

La puissance est maximale lorsque la dérivée s'annule, c'est-à-dire pour $\boxed{E_m = \frac{E}{2}}$. On trouve :

$$\boxed{\mathcal{P}_{m,\max} = \frac{E^2}{4(R + R_m)} = 2,2 \text{ W}}$$

5. On exprime maintenant la fonction $\eta(E_m)$: $\eta = \frac{E_m}{U} = (R + R_m) \frac{E_m}{ER_m + E_m R}$.

On calcule sa dérivée :

$$\eta'(E_m) = (R + R_m) \frac{ER_m + E_m R - RE_m}{(ER_m + E_m R)^2} = \frac{(R + R_m)ER_m}{(ER_m + E_m R)^2}$$

On constate que $\eta'(E_m) > 0 \forall E_m$ donc $\boxed{\eta(E_m) \text{ est strictement croissante}}$. On a vu que E_m ne peut pas être supérieure à E donc :

$$\boxed{\eta_{\max} = \eta(E) = \frac{E(R + R_m)}{ER_m + ER} = 1}$$

Le rendement maximal est de 100%, lorsque $E_m = E$. Malheureusement, cette configuration implique que $I = 0$ donc que $\boxed{\mathcal{P}_m = 0!}$. On comprend qu'en augmentant la valeur de E_m , on améliore le rendement au prix d'une puissance motrice plus faible. La configuration $E_m = E$ n'est évidemment pas souhaitable.

Exercice 3 : Décharge d'un condensateur dans un autre condensateur

1. On obtient le schéma simplifié en enlevant la branche ouverte.
D'après la loi des mailles : $E = u_R + u_0 = Ri + u_0 = RC_0 \frac{du_0}{dt} + u_0$.

On obtient finalement : $\frac{du_0}{dt} + \frac{u_0}{RC_0} = \frac{E}{RC_0}$.

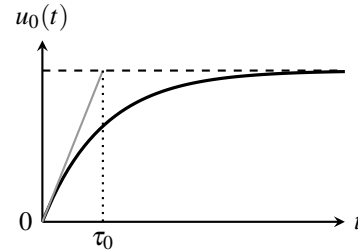
On identifie la constante de temps $\tau_0 = RC_0 = 10 \mu s$.

2. La solution générale s'écrit : $u_0(t) = Ae^{-t/\tau_0} + u_{0,p}$.

On calcule la solution particulière : $u_{0,p} = E$.

Avec la condition initiale $u_0(0^+) = 0$ (condensateurs initialement déchargés) on montre que $A = -E$ d'où

$u_0(t) = E(1 - e^{-t/\tau_0})$. On trace ci-contre son allure :



3. On écrit le bilan d'énergie du condensateur C_0 :

$$W_0 = \mathcal{E}(\infty) - \mathcal{E}(0^+) = \frac{1}{2}C_0 u_0^2(\infty) - \frac{1}{2}C_0 u_0^2(0^+)$$

Sachant que $u_0(\infty) = E$ et $u_0(0^+) = 0$ on conclut que $E_0 = \frac{1}{2}C_0 E^2$.

4. Les lois d'évolution pour les deux condensateurs s'écrivent

(attention aux conventions!) : $i = C_0 \frac{du_0}{dt} = -C_1 \frac{du_1}{dt}$.

De cette relation on déduit que :

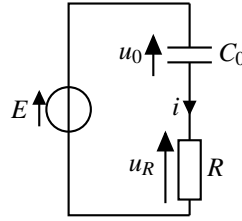
$$C_0 \frac{du_0}{dt} + C_1 \frac{du_1}{dt} = \frac{d}{dt}(C_0 u_0 + C_1 u_1) = 0$$

La quantité $C_0 u_0(t) + C_1 u_1(t)$ se conserve au cours du temps.

À l'instant initial $t = 0^+$ on a $u_0(0^+) = E$ (le condensateur C_0 est chargé) et $u_1(0^+) = 0$ (le condensateur C_1 est toujours déchargé). On a donc : $C_0 u_0(t) + C_1 u_1(t) = C_0 E \quad \forall t$.

5. On applique la loi des mailles $u_0 + u_R = u_1$ avec : $u_R = Ri = RC_0 \frac{du_0}{dt}$. D'après le résultat de la question précédente : $u_1 = \frac{C_0(E - u_0)}{C_1}$. En réinjectant ces expressions dans la loi des mailles on trouve que :

$$\begin{aligned} u_0 + RC_0 \frac{du_0}{dt} &= \frac{C_0}{C_1} E - \frac{C_0}{C_1} u_0 \iff \frac{du_0}{dt} + \frac{u_0}{RC_0} = \frac{E}{RC_1} - \frac{u_0}{RC_1} \\ &\iff \frac{du_0}{dt} + \left(\frac{1}{RC_0} + \frac{1}{RC_1} \right) u_0 = \frac{E}{RC_1} \\ &\iff \frac{du_0}{dt} + \frac{C_0 + C_1}{RC_0 C_1} u_0 = \frac{E}{RC_1} \end{aligned}$$



6. En régime permanent de tension $u_0(\infty)$ constante le terme du_0/dt est nul donc :

$$\frac{C_0 + C_1}{RC_0 C_1} u_0(\infty) = \frac{E}{RC_1} \iff u_0(\infty) = \frac{C_0}{C_0 + C_1} E$$

On en déduit immédiatement $u_1(\infty)$:

$$u_1(\infty) = \frac{C_0(E - u_0(\infty))}{C_1} \iff u_1(\infty) = \frac{C_0}{C_0 + C_1} E$$

Remarque : on pouvait établir ce dernier résultat d'une autre manière. En régime permanent les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts donc $u_R(\infty) = Ri(\infty) = 0$. D'après la loi des mailles $u_1(\infty) = u_0(\infty)$.

7. On écrit le bilan d'énergie du condensateur C_0 :

$$-W'_0 = \frac{1}{2}C_0 u_0^2(\infty) - \frac{1}{2}C_0 u_0^2(0^+) \iff W'_0 = \frac{1}{2}C_0 \left(1 - \left(\frac{C_0}{C_0 + C_1} \right)^2 \right) E^2$$

Remarque : On écrit $-W'_0$ car on cherche le travail électrique **fourni** et non reçu.

On écrit le bilan d'énergie du condensateur C_1 :

$$W_1 = \frac{1}{2}C_1 u_1^2(\infty) - \frac{1}{2}C_1 u_1^2(0^+) \iff W_1 = \frac{1}{2}C_1 \left(\frac{C_0}{C_0 + C_1} \right)^2 E^2$$

On écrit le bilan d'énergie global du circuit :

$$W'_0 = W_R + W_1 \iff W_R = W'_0 - W_1 = \frac{1}{2} \left[C_0 \left(1 - \left(\frac{C_0}{C_0 + C_1} \right)^2 \right) - C_1 \left(\frac{C_0}{C_0 + C_1} \right)^2 \right] E^2$$

On peut montrer que cette expression se simplifie en $W_R = \frac{1}{2} \frac{C_0 C_1}{C_0 + C_1} E^2$.

8. Quand plusieurs condensateurs sont placés en dérivation **leurs capacités s'additionnent** (voir ex 4 du TD 6).

$$C_1 = NC_0 \implies W_1 = \frac{1}{2} \times \frac{N}{(1+N)^2} C_0 E^2$$

On en déduit que $r = \frac{W_1}{W_0} = \frac{N}{(1+N)^2} = 0,09$.