

Devoir n°8 (non surveillé)

EXERCICE 1

Calculer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes :

$$f(x) = \frac{x^3 - x - 1}{(x - 2)^2} ; \quad g(x) = \ln \frac{\sqrt{x}}{x - 1} ; \quad h(x) = x e^{-\frac{1}{x^2}} ; \quad i(x) = \cos^3(x)$$

$$j(x) = (x^x)^x ; \quad k(x) = \operatorname{ch}(\tan x) ; \quad \ell(x) = (\operatorname{Arctan} \sqrt{x})^{2025}.$$

On précisera leurs ensembles de dérivabilité (en justifiant rapidement) et on s'efforcera de mettre les résultats sous une forme qui permettrait ensuite d'étudier facilement leurs signes (mais cette étude n'est pas demandée).

EXERCICE 2

1) Montrer que $\frac{2x}{1+x^2} \in [-1, 1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2} = \operatorname{Arctan} x$.

EXERCICE 3

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^e \ln^2(x) dx ; \quad \int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx ; \quad \int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx ; \quad \int_{1/2}^{3/4} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$