

Correction du DNS 6

EXERCICE 1

1) On a :

$$\begin{aligned}
 \cos\left(\frac{\pi}{3} + i \frac{\ln 2}{2}\right) &= \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{3} + i \frac{\ln 2}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{3} + i \frac{\ln 2}{2}\right)}}{2} \\
 &= \frac{e^{i\frac{\pi}{3} - \frac{\ln 2}{2}} + e^{-i\frac{\pi}{3} + \frac{\ln 2}{2}}}{2} \\
 &= \frac{e^{i\frac{\pi}{3}} e^{-\frac{\ln 2}{2}} + e^{-i\frac{\pi}{3}} e^{\frac{\ln 2}{2}}}{2} \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \sqrt{2}}{2} \quad (\text{car } e^{\frac{\ln 2}{2}} = e^{\ln(2^{\frac{1}{2}})} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}) \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)}{2} \\
 &= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)}{2} \\
 &= \frac{3\sqrt{2}}{8} - i \frac{\sqrt{6}}{8}.
 \end{aligned}$$

Le module de ce nombre est

$$\sqrt{\frac{18}{64} + \frac{6}{64}} = \sqrt{\frac{24}{64}} = \frac{2\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

et si θ en est un argument on a

$$\cos \theta = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{8}}{\frac{\sqrt{6}}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{8} \times \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{-\frac{\sqrt{6}}{8}}{\frac{\sqrt{6}}{4}} = -\frac{\sqrt{6}}{8} \times \frac{4}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{2}$$

donc on peut prendre $\theta = -\frac{\pi}{6}$. Ainsi

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + i \frac{\ln 2}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

2) a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos(-z) = \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \cos(z) \quad \text{et} \quad \sin(-z) = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = -\sin(z).$$

b) Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{aligned}
 \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) &= \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} - \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} \frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2} \\
 &= \frac{(e^{ia} + e^{-ia})(e^{ib} + e^{-ib})}{4} - \frac{(e^{ia} - e^{-ia})(e^{ib} - e^{-ib})}{-4} \\
 &= \frac{(e^{ia} + e^{-ia})(e^{ib} + e^{-ib}) + (e^{ia} - e^{-ia})(e^{ib} - e^{-ib})}{4} \\
 &= \frac{e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)} + e^{i(-a+b)} + e^{i(-a-b)} + e^{i(a+b)} - e^{i(a-b)} - e^{i(-a+b)} + e^{i(-a-b)}}{4} \\
 &= \frac{2e^{i(a+b)} + 2e^{i(-a-b)}}{4} \\
 &= \frac{e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}}{2} \\
 &= \cos(a+b).
 \end{aligned}$$

c) Soit $z \in \mathbb{C}$. En prenant $a = z$ et $b = -z$ dans l'égalité précédente on obtient :

$$\cos(z - z) = \cos(z) \cos(-z) - \sin(z) \sin(-z) = \cos(z) \cos(z) + \sin(z) \sin(z) = \cos^2(z) + \sin^2(z)$$

donc $\cos^2(z) + \sin^2(z) = \cos(0) = 1$.

3) a) On a :

$$\begin{aligned}\cos(x + iy) &= \frac{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}{2} \\ &= \frac{e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^y}{2} \\ &= \frac{(\cos x + i \sin x)e^{-y} + (\cos x - i \sin x)e^y}{2} \\ &= \frac{\cos x(e^{-y} + e^y) + i \sin x(e^{-y} - e^y)}{2} \\ &= \cos x \frac{e^y + e^{-y}}{2} - i \sin x \frac{e^y - e^{-y}}{2}\end{aligned}$$

donc la partie réelle de $\cos(z)$ est $\cos x \frac{e^y + e^{-y}}{2}$ et sa partie imaginaire est $-\sin x \frac{e^y - e^{-y}}{2}$.

b) On pose à nouveau $z = x + iy$ où x et y sont des réels. D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}\cos(z) \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow -\sin x \frac{e^y - e^{-y}}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ ou } e^y = e^{-y} \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, x = k\pi) \text{ ou } y = 0.\end{aligned}$$

L'ensemble des images des complexes z tel que $\cos(z)$ est réel est donc la réunion de l'axe des réels et des droites verticales d'équations $x = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 2

1) a) Une équation de T_a est $y = e^a(x - a) + e^a$.

b) Une équation de T'_b est $y = \frac{1}{b}(x - b) + \ln b$.

c) T_a et T'_b sont confondues si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^a(x - a) + e^a = \frac{1}{b}(x - b) + \ln b$, soit $e^a x - ae^a + e^a = \frac{1}{b}x - 1 + \ln b$, donc si et seulement si $\begin{cases} e^a = \frac{1}{b} \\ -ae^a + e^a = -1 + \ln b \end{cases}$, soit $\begin{cases} b = e^{-a} \\ (1 - a)e^a = -1 - a \end{cases}$, soit encore $\begin{cases} b = e^{-a} \\ e^{-a} = \frac{a - 1}{a + 1} \end{cases}$.

2) a) Par les théorèmes généraux, f est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2}e^x > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur I . On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 1/x}{1 + 1/x}e^x = +\infty$.

b) La fonction f est continue et strictement croissante sur I , donc elle définit une bijection de I dans $f(I) = [-1, +\infty[$. L'équation $f(x) = 1$ a donc une unique solution sur I .

c) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on a : $f(x) \times f(-x) = \frac{x-1}{x+1}e^x \frac{-x-1}{-x+1}e^{-x} = \frac{x-1}{x+1}e^x \frac{x+1}{x-1}e^{-x} = 1$.

Si $x < 0$ et $x \neq -1$, on a : $f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(-x)} = 1 \Leftrightarrow f(-x) = 1 \Leftrightarrow -x = \alpha \Leftrightarrow x = -\alpha$.

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ est donc $\{\alpha, -\alpha\}$.

3) a) D'après 1)c), les droites T_a et T'_b sont confondues si et seulement si $\begin{cases} f(a) = 1 \\ b = e^{-a} \end{cases}$, i.e. si et seulement si $\begin{cases} a = \alpha \\ b = e^{-\alpha} \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = -\alpha \\ b = e^{\alpha} \end{cases}$ d'après la question précédente.

Les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont donc deux tangentes communes : les droites T_α et $T_{-\alpha}$.

b) La droite T_α rencontre $\mathcal{C}$ en $A(\alpha, e^\alpha)$ et $\mathcal{C}'$ en $A'(e^{-\alpha}, -\alpha)$ (car $T_\alpha = T'_{e^{-\alpha}}$).

La droite $T_{-\alpha}$ rencontre $\mathcal{C}$ en $B(-\alpha, e^{-\alpha})$ et $\mathcal{C}'$ en $B'(e^\alpha, \alpha)$ (car $T_{-\alpha} = T'_{e^\alpha}$).

Les points A et B' sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ et les points A' et B aussi, donc les droites $T_\alpha = (AA')$ et $T_{-\alpha} = (BB')$ également.