

ENSEMBLES - APPLICATIONS

I Notions sur les ensembles

1 Notation

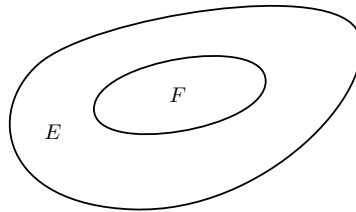
On peut définir un ensemble **en extension**, c'est-à-dire en donnant explicitement ses éléments, ou **en compréhension**, c'est-à-dire en donnant une propriété caractéristique des éléments de cet ensemble. Dans les deux cas on utilise des accolades.

Exemples :

- $\{1, 2, 3\}$ désigne l'ensemble dont les éléments sont 1, 2 et 3. On peut aussi l'écrire par exemple $\{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n < 4\}$ (ou $\{n \in \mathbb{N}, 0 < n < 4\}$ ou $\{n \in \mathbb{N} ; 0 < n < 4\}$).
- L'ensemble des entiers naturels pairs peut être noté $\{0, 2, 4, \dots\}$ ou $\{2p \mid p \in \mathbb{N}\}$ ou $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p\}$.
- $\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \leq 10\}$ est l'ensemble des entiers naturels dont le carré est inférieur ou égal à 10 (c'est-à-dire l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$).

2 Sous-ensemble

Définition 1 Soit E un ensemble. Un ensemble F est une **partie de E** ou un **sous-ensemble de E** si tous les éléments de F appartiennent à E . On dit alors que F est **inclus dans E** et on note $F \subset E$.



Remarque : L'ensemble vide $\emptyset$ est donc toujours une partie de E .

Exemple : Pour les ensembles de nombres, on a les inclusions : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Définition 2 Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

Par exemple, si $E = \{a, b, c\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$.

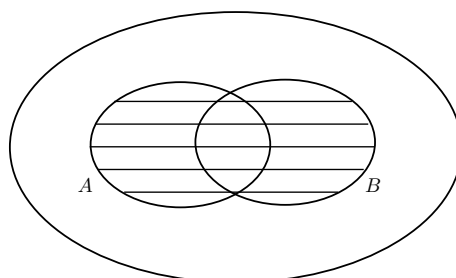
3 Réunion de sous-ensembles

Définition 3 Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E . La **réunion** (ou **union**) de A et de B est le sous-ensemble de E formé des éléments qui appartiennent à A ou à B . On le note $A \cup B$.

Autrement dit :

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B),$$

le « ou » étant ici inclusif (c'est-à-dire que x peut appartenir à A , à B ou aux deux).



Proposition 1 Soient A , B et C trois sous-ensembles de E . Alors :

- (i) $A \cup B = B \cup A$ ($\cup$ est commutative).
- (ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ($\cup$ est associative).
- (iii) $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$ ($\emptyset$ est élément neutre pour $\cup$).

Plus généralement :

Définition 4 Soit E un ensemble et soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E . La **réunion** des A_i est le sous-ensemble de E formé des éléments qui appartiennent à l'un au moins des A_i . On le note $\bigcup_{i \in I} A_i$.

Autrement dit :

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\exists i \in I, x \in A_i).$$

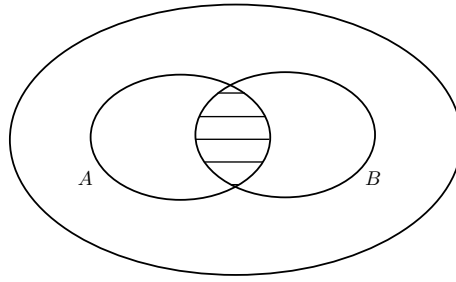
Exemple : Soit $E = \mathbb{R}$ et soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = [n, n+1]$ (i.e. $A_0 = [0, 1]$, $A_1 = [1, 2]$, etc...). Alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}^+$.

4 Intersection de sous-ensembles

Définition 5 Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E . L'**intersection** de A et de B est le sous-ensemble de E dont les éléments appartiennent à A et à B . On le note $A \cap B$.

Autrement dit :

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B).$$



Proposition 2 Soient A , B et C trois sous-ensembles de E . Alors :

- (i) $A \cap B = B \cap A$ ($\cap$ est commutative).
- (ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ($\cap$ est associative).
- (iii) $A \cap E = E \cap A = A$ (E est élément neutre pour $\cap$).

Remarque : Si $A \cap B = \emptyset$ on dit que A et B sont **disjoints**.

Définition 6 Soit E un ensemble et soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E . L'**intersection** des A_i est le sous-ensemble de E formé des éléments qui appartiennent à tous les A_i . On le note $\bigcap_{i \in I} A_i$.

Autrement dit :

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\forall i \in I, x \in A_i).$$

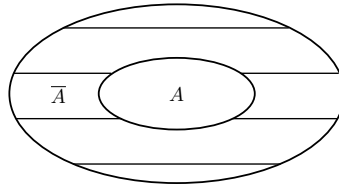
Exemple : Soit $E = \mathbb{R}$ et soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = [0, \frac{1}{n}]$ (i.e. $A_1 = [0, 1]$, $A_2 = [0, \frac{1}{2}]$, etc...). Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \{0\}$.

5 Complémentaire d'un sous-ensemble

Définition 7 Soit E un ensemble et soit A un sous-ensemble de E . Le **complémentaire** de A dans E est le sous-ensemble de E formé des éléments qui n'appartiennent pas à A . On le note $\bar{A}$ ou A^c ou $E \setminus A$ ou $\complement_E A$.

Autrement dit :

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A.$$



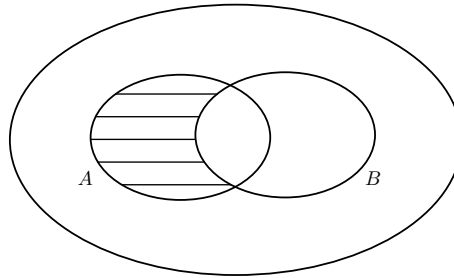
Remarque : $\bar{\emptyset} = E$ et $\bar{E} = \emptyset$.

6 Différence de deux sous-ensembles

Définition 8 Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E . La **différence de A et de B** est le sous-ensemble de E formé des éléments qui appartiennent à A mais pas à B . On le note $A \setminus B$.

Autrement dit :

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B).$$



Remarque : On a donc $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

7 Propriétés

• EGALITÉ DE DEUX SOUS-ENSEMBLES

Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E . Alors :

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A).$$

Pour montrer que $A = B$ on peut donc procéder par **double inclusion** : on montre que $A \subset B$, puis que $B \subset A$.

On peut aussi essayer d'établir l'équivalence $(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

• DISTRIBUTIVITÉ DE $\cup$ PAR RAPPORT À $\cap$

Proposition 3 Soient E un ensemble et A , B et C des sous-ensembles de E . Alors :

$$(i) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

$$(ii) (B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A).$$

Démonstration :

Démontrons le (i) par double inclusion.

Montrons d'abord que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Soit donc $x \in A \cup (B \cap C)$. Alors $x \in A$ ou $(x \in B \text{ et } x \in C)$. Si $x \in A$, alors $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$. Sinon $x \in B$ et $x \in C$ donc $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$. Dans les deux cas, on peut conclure que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Montrons maintenant que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$. Soit donc $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Alors $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$. Si $x \in A$, alors $x \in A \cup (B \cap C)$. Si $x \notin A$, alors nécessairement $x \in B$ et $x \in C$, donc $x \in B \cap C$, et donc $x \in A \cup (B \cap C)$ également.

Conclusion : on a montré que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$, donc $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Le (ii) se déduit du (i) et de la commutativité de $\cup$. $\square$

• DISTRIBUTIVITÉ DE $\cap$ PAR RAPPORT À $\cup$

Proposition 4 Soient E un ensemble et A , B et C des sous-ensembles de E . Alors :

$$(i) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

$$(ii) (B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A).$$

Exercice 1 Démontrer cette proposition.

• RÈGLES DE DE MORGAN

Proposition 5 Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E . Alors :

$$(i) \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

$$(ii) \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Démonstration :

$$(i) x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \notin A \\ x \notin B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \overline{A} \\ x \in \overline{B} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}.$$

$$(ii) x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow (x \notin A \text{ ou } x \notin B) \Leftrightarrow (x \in \overline{A} \text{ ou } x \in \overline{B}) \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}. \square$$

8 Partition d'un ensemble

Définition 9 Soit E un ensemble. Une **partition** de E est un ensemble de parties de E non vides, deux à deux disjointes et dont la réunion est égale à E .

Par exemple $\{\{1, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{6\}\}$ est une partition de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Remarque : Si on ne demande pas aux parties d'être non vides, on obtient seulement un **recouvrement disjoint** de E .

Exercice 2 Déterminer les partitions de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

9 Fonction indicatrice d'une partie

Définition 10 Soit E un ensemble et soit A un sous-ensemble de E . La **fonction indicatrice** (ou **fonction caractéristique**) de A est l'application $\mathbb{1}_A : E \rightarrow \{0, 1\}$ définie par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}.$$

On peut aussi la noter χ_A .

Proposition 6 Soient E un ensemble et A, B deux parties de E . Alors :

$$(i) \mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A.$$

$$(iv) \mathbb{1}_{A \cap B} = \min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B.$$

$$(ii) A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B.$$

$$(v) \mathbb{1}_{A \cup B} = \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B.$$

$$(iii) A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B.$$

$$(vi) \mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A.$$

Démonstration :

(i) Immédiat.

(ii) $(\Rightarrow)$ Supposons que $A \subset B$. Soit $x \in E$. Si $x \in A$, alors $x \in B$, donc $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x) = 1$. Si $x \notin A$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 0$. Dans les deux cas on a $\mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)$.

$(\Leftarrow)$ Supposons que $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$. Alors, pour tout $x \in A$, on a $\mathbb{1}_A(x) = 1 \leq \mathbb{1}_B(x)$, donc $\mathbb{1}_B(x) = 1$ et $x \in B$.

(iii) $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A) \Leftrightarrow (\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B \text{ et } \mathbb{1}_B \leq \mathbb{1}_A) \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

(iv) Si $x \in A \cap B$, alors $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x) = 1$, donc $\min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)(x) = (\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B)(x) = 1$. Si $x \notin A \cap B$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 0$ ou $\mathbb{1}_B(x) = 0$, donc $\min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)(x) = (\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B)(x) = 0$. On a donc toujours $\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = \min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)(x) = (\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B)(x)$.

(v) Analogie en distinguant les cas $x \in A \cap B$, $x \in A \setminus B$, $x \in B \setminus A$, $x \in \overline{A \cup B}$.

(vi) Si $x \in A$, $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = 0$ et $1 - \mathbb{1}_A(x) = 0$, et si $x \notin A$, $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = 1$ et $1 - \mathbb{1}_A(x) = 1$. $\square$

En utilisant les fonctions indicatrices, on peut démontrer assez simplement de nombreuses propriétés ensemblistes.

Exercice 3 Redémontrer la distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$ et celle de $\cup$ par rapport à $\cap$ en utilisant les fonctions indicatrices.

10 Produit cartésien

Définition 11 Soient E et F deux ensembles. Le **produit cartésien** de E et de F est l'ensemble des couples (x, y) où x est un élément de E et y est un élément de F . On le note $E \times F$.

Autrement dit :

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}.$$

Exemple : Si $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{0, 1\}$, alors $E \times F = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 0), (c, 1)\}$.

Remarques :

1) $E \times F$ se lit « E croix F ».

2) Le produit cartésien $E \times E$ est noté E^2 . C'est l'ensemble des couples d'éléments de E :

$$E^2 = \{(x, y) \mid x, y \in E\}.$$

Définition 12 Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ des ensembles. Le **produit cartésien** de $E_1, E_2, \dots, E_n$ est l'ensemble des éléments de la forme $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, x_i est un élément de E_i . On le note $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ ou $\prod_{i=1}^n E_i$.

Un élément de la forme $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est appelé **n -uplet**.

Remarque : Le produit cartésien $E \times E \times \dots \times E$ est noté E^n :

$$E^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i \in E\}.$$

II Notions sur les applications

1 Définition

Définition 13 Soient E et F deux ensembles. Une **application** f de E dans F est la donnée d'une partie G de $E \times F$ telle que, pour tout x de E , il existe un unique y dans F tel que le couple (x, y) appartienne à G . Ce y est alors appelé **image** de x par f et noté $f(x)$, et x est un **antécédent** de y par f .

En clair, cela signifie qu'une application associe à chaque élément de E un et un seul élément de F .

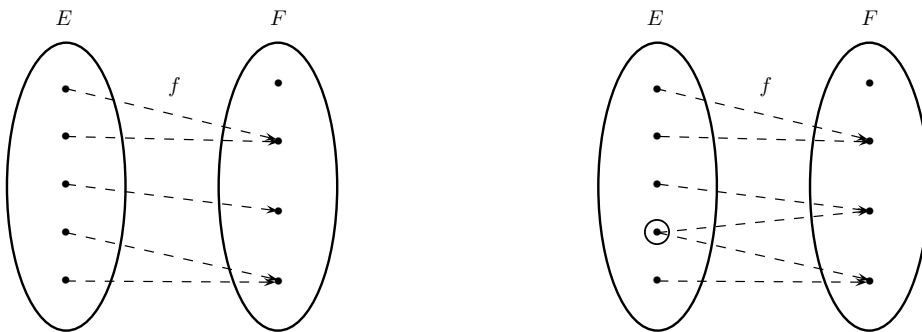
Pour désigner une application de E dans F on utilise la notation $f : E \rightarrow F$. E est l'**ensemble de départ** (ou **ensemble de définition**) de f , F est son **ensemble d'arrivée**.

L'ensemble $G = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ est appelé le **graphe** de f .

On note $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E l'ensemble des applications de E dans F .

Remarque : Égalité de deux applications :

$$f = g \Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) = g(x).$$



La figure de gauche représente une application f entre les ensembles E et F , mais pas la figure de droite car l'un des éléments de E a deux images.

Exemples :

– $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: à chaque réel x elle associe le réel x^2 .

– $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n!$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$: à chaque entier naturel n elle associe l'entier naturel $n!$.

– On a vu au chapitre 2 des exemples d'applications du plan dans lui-même : les translations, les rotations, les réflexions, les homothéties, qui, à un point du plan, associent un autre point du plan.

– Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$. Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \int_0^1 f(x)dx$. C'est une application de E dans $\mathbb{R}$: à une fonction elle associe un réel.

– Si $f : E \rightarrow F$ est une application et A un sous-ensemble de E , on appelle **restriction de f à A** l'application $f|_A : A \rightarrow F$ définie par $f|_A(x) = f(x)$.

– Soient E et I deux ensembles. Une **famille d'éléments de E indexée par I** est une application de I dans E . Une telle famille $x : I \rightarrow E$ est notée $(x_i)_{i \in I}$ où $x_i = x(i)$. En particulier, une famille d'éléments de E indexée par $\mathbb{N}$ est appelée **suite** d'éléments de E .

2 Image directe, image réciproque

Définition 14 Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Soit A un sous-ensemble de E . **L'image directe de A par f** est le sous-ensemble de F formé des images par f des éléments de A . On le note $f(A)$.

Autrement dit :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors $f([1, 2]) = [1, 4]$, $f([-1, 3]) = [0, 9]$, etc.

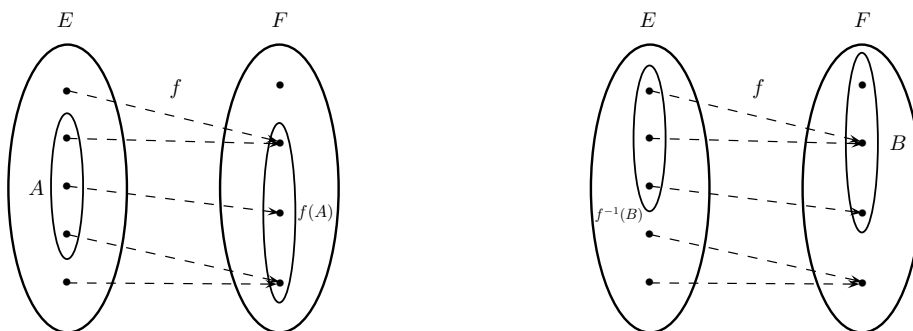
Définition 15 Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Soit B un sous-ensemble de F . **L'image réciproque de B par f** est le sous-ensemble de E formé des antécédents par f des éléments de B . On le note $f^{-1}(B)$.

Autrement dit :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors $f^{-1}([0, 4]) = [-2, 2]$, $f^{-1}([1, +\infty[) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, etc.

Remarque : Ne pas confondre cette notation avec celle de la fonction réciproque d'une bijection : $f^{-1}(B)$ a un sens même si f n'est pas bijective (mais si f est bijective l'image directe de B par f^{-1} coïncide avec l'image réciproque de B par f).



Exercice 4

1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f^{-1}(\{5\})$ et $f^{-1}(\mathbb{N})$.
 $x \mapsto |x|$

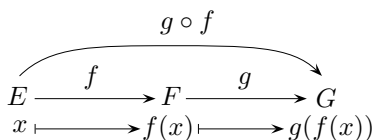
2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$. Déterminer $f([0, 5])$, $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\mathbb{N})$.
 $x \mapsto \lfloor x \rfloor$

3) Soit $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$. Déterminer $f(\{0, 1, 2\}^2)$, $f^{-1}(\{25\})$ et $f^{-1}(\{0, \dots, 10\})$.
 $(p, q) \mapsto p^2 + q^2$

3 Composée de deux applications

Définition 16 Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ deux applications. La **composée de f et de g** est l'application de E dans G notée $g \circ f$ et définie par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



Exemple : Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x + 1$ et $g(x) = 2x + 1$.

Alors $(g \circ f)(x) = 2(x^2 + x + 1) + 1 = 2x^2 + 2x + 3$ et $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (2x + 1)^2 + (2x + 1) + 1 = 4x^2 + 6x + 3$.

La composition n'est donc pas commutative. En revanche elle est associative :

Proposition 7 Soient $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ et $h : G \rightarrow H$ des applications. Alors $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Démonstration :

Soit $x \in E$. Alors $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$ et $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$. Les applications $(h \circ g) \circ f$ et $h \circ (g \circ f)$ sont donc égales. $\square$

4 Application identité

Définition 17 Soit E un ensemble. L'application identité ou identité de E est l'application de E dans E notée Id_E définie par :

$$\text{Id}_E(x) = x.$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur E , on la note simplement Id .

Proposition 8 Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$ une application. Alors $f \circ \text{Id}_E = f$ et $\text{Id}_F \circ f = f$.

Démonstration : Immédiat. $\square$

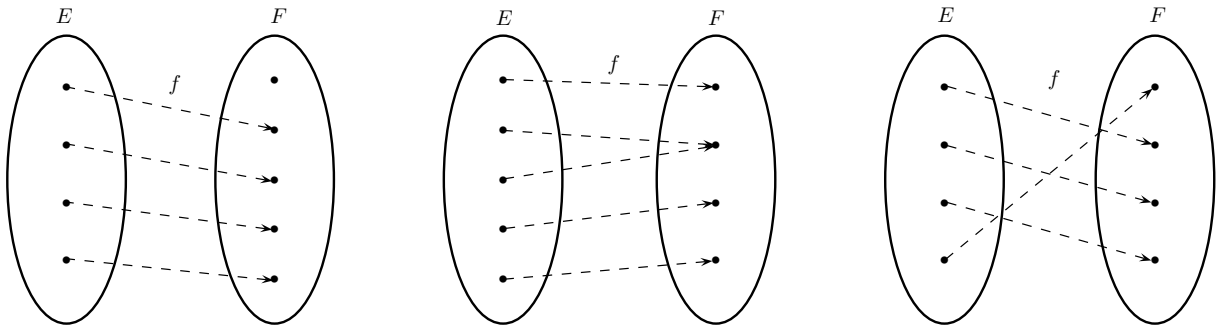
5 Applications injectives, surjectives, bijectives

• INJECTIVITÉ, SURJECTIVITÉ, BIJECTIVITÉ

Définition 18 Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$ une application.

- (i) On dit que f est **injective** si tout élément de F a au plus un antécédent par f .
- (ii) On dit que f est **surjective** si tout élément de F a au moins un antécédent par f .
- (iii) On dit que f est **bijective** si tout élément de F a exactement un antécédent par f .

« Au plus un » signifie zéro ou un.



La première figure représente une application injective mais non surjective. La deuxième représente une application surjective mais non injective. La troisième représente une application bijective.

Remarques :

1) Avec des quantificateurs :

(i) f est injective si et seulement si : $\forall (x, y) \in E^2, (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$, ou encore, par contraposée, si et seulement si : $\forall (x, y) \in E^2, (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$.

(ii) f est surjective si et seulement si : $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.

(iii) f est bijective si et seulement si : $\forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x)$.

2) En pratique, pour montrer que $f : E \rightarrow F$ est injective, on suppose qu'il existe $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$, et on montre qu'alors $x = y$.

3) f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

4) f est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.

Exercice 5 Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

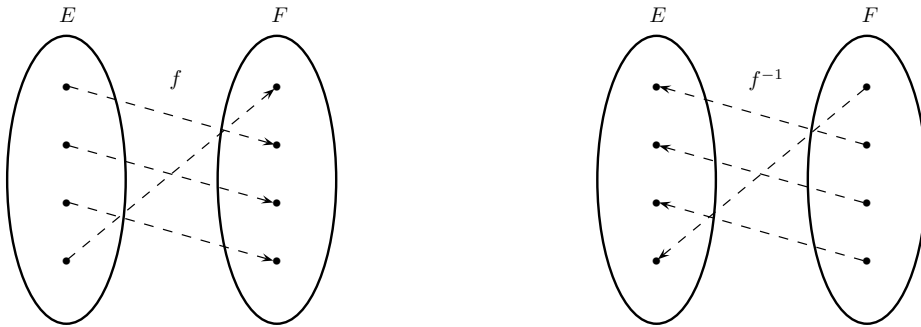
- 1) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(z) = |z|$.
- 2) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n + 1$ et $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $g(n) = n + 1$.
- 3) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n^2$, $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $g(n) = n^2$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x^2$, $k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $k(z) = z^2$.
- 4) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y) = (x + y, xy)$.
- 5) La projection orthogonale sur un plan P de l'espace, la réflexion par rapport à P .

• APPLICATION RÉCIPROQUE D'UNE BIJECTION

Définition 19 Soit f une bijection de E dans F . Pour tout $y \in F$ on note $f^{-1}(y)$ l'unique antécédent de y par f . On définit ainsi une application $f^{-1} : F \rightarrow E$ appelée **application réciproque** de f .

Pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in F$, on a donc :

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x).$$



Proposition 9 Une application $f : E \rightarrow F$ est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que $\begin{cases} f \circ g = \text{Id}_F \\ g \circ f = \text{Id}_E \end{cases}$. De plus, si g existe, alors $g = f^{-1}$.

Démonstration :

($\Rightarrow$) Supposons f bijective. On va montrer que $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$ et que $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$.

Soit $y \in F$. Alors $f^{-1}(y)$ est un antécédent de y par f , donc $f(f^{-1}(y)) = y$. On a donc $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$.

Soit $x \in E$. Par définition, $f^{-1}(f(x))$ est l'unique antécédent de $f(x)$ par f : c'est x . On a donc $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$.

($\Leftarrow$) Supposons qu'il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que $\begin{cases} f \circ g = \text{Id}_F \\ g \circ f = \text{Id}_E \end{cases}$. On va montrer que f est injective et surjective.

Montrons que f est injective. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Or $g \circ f = \text{Id}_E$, donc $x_1 = x_2$.

Montrons maintenant que f est surjective. Soit $y \in F$. Posons $x = g(y)$. Alors $f(x) = f(g(y)) = y$ puisque $f \circ g = \text{Id}_F$. x est donc un antécédent de y par f .

De plus, si $y \in F$, on a vu que $g(y)$ est un antécédent de y par f , donc en fait $g(y) = f^{-1}(y)$: l'application g n'est autre que f^{-1} . $\square$

Exercice 6 Soient les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ et $g :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et $g(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. Que peut-on en déduire ?

• COMPOSÉE DE DEUX INJECTIONS, DE DEUX SURJECTIONS, DE DEUX BIJECTIONS

Proposition 10 Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

(i) Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ aussi.

(ii) Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ aussi.

(iii) Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ aussi, et sa réciproque est $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration :

(i) Supposons f et g injectives. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$. Alors $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Or g est injective, donc $f(x_1) = f(x_2)$. Mais f est également injective donc $x_1 = x_2$. Ainsi $g \circ f$ est bien injective.

(ii) Supposons f et g surjectives. Soit $z \in G$. Puisque g est surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. De même, puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a donc $z = g(f(x)) = g \circ f(x)$: $g \circ f$ est bien surjective.

(iii) On a $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \text{Id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{Id}_G$ et $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \text{Id}_F \circ f = f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$, donc, par la proposition précédente, $g \circ f$ est bijective et sa réciproque est $f^{-1} \circ g^{-1}$. $\square$