

Devoir n°9 (non surveillé)

EXERCICE 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 3x + 2} ; \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 6x + 9} ; \int_1^2 \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx.$$

EXERCICE 2

Pour tout entier naturel n on pose

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx.$$

1) Calculer I_0 .

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$I_n = \frac{2n}{3} \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{3/2} dx$$

puis, en écrivant que $(1-x)^{3/2} = (1-x)\sqrt{1-x}$, en déduire que

$$I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}.$$

3) En raisonnant par récurrence, montrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{2^{2n+3} n! (n+2)!}{(2n+4)!}.$$

EXERCICE 3

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$xy' - y = \ln x \text{ (sur }]0, +\infty[) ; \sqrt{1-x^2} y' + y = 1 \text{ (sur }]-1, 1[) ; 2x(1+x)y' + (1+x)y = 1 \text{ (sur }]0, +\infty[).$$