

Correction du DNS 8

EXERCICE 1

1) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ (fonction rationnelle). Pour tout $x \neq 2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 - 1)(x - 2)^2 - (x^3 - x - 1)2(x - 2)}{(x - 2)^4} \\ &= \frac{(3x^2 - 1)(x - 2) - 2(x^3 - x - 1)}{(x - 2)^3} \\ &= \frac{x^3 - 6x^2 + x + 4}{(x - 2)^3} \\ &= \frac{(x - 1)(x^2 - 5x - 4)}{(x - 2)^3}. \end{aligned}$$

2) La fonction g est définie et dérivable sur $D =]1, +\infty[$ d'après les théorèmes sur les opérations. Pour tout $x \in D$:

$$g(x) = \frac{1}{2} \ln(x) - \ln(x - 1)$$

donc

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2x} - \frac{1}{x - 1} \\ &= \frac{x - 1 - 2x}{2x(x - 1)} \\ &= -\frac{x + 1}{2x(x - 1)}. \end{aligned}$$

3) La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ d'après les théorèmes sur les opérations. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2x^2}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{x^2 + 2}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}. \end{aligned}$$

4) La fonction i est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes sur les opérations. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$i'(x) = -3 \sin(x) \cos^2(x).$$

5) En écrivant

$$(x^x)^x = e^{x \ln(x^x)} = e^{x^2 \ln(x)}$$

on voit que la fonction j est définie et dérivable sur $D =]0, +\infty[$ d'après les théorèmes sur les opérations. Pour tout $x \in D$:

$$\begin{aligned} j'(x) &= \left(2x \ln x + \frac{x^2}{x}\right) e^{x^2 \ln(x)} \\ &= x(2 \ln x + 1) e^{x^2 \ln(x)}. \end{aligned}$$

6) La fonction $\tan$ est définie et dérivable sur les intervalles de la forme $]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et la fonction ch est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composition la fonction k est définie et dérivable sur les intervalles de la forme $]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Pour tout x appartenant à un intervalle de ce type :

$$k'(x) = \frac{\text{sh}(\tan x)}{\cos^2 x}.$$

7) La fonction ℓ est définie et dérivable sur $D =]0, +\infty[$ d'après les théorèmes sur les opérations. Pour tout $x \in D$:

$$\ell'(x) = 2025(\text{Arctan } \sqrt{x})^{2024} \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{1 + \sqrt{x}^2} = \frac{2025(\text{Arctan } \sqrt{x})^{2024}}{2\sqrt{x}(1 + x)}.$$

EXERCICE 2

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\frac{2x}{1 + x^2} - 1 = \frac{2x - 1 - x^2}{1 + x^2} = -\frac{(x - 1)^2}{1 + x^2} \leq 0$$

donc $\frac{2x}{1+x^2} \leq 1$ et

$$\frac{2x}{1+x^2} - (-1) = \frac{2x+1+x^2}{1+x^2} = \frac{(x+1)^2}{1+x^2} \geq 0$$

donc $\frac{2x}{1+x^2} \geq -1$. On a donc bien l'encadrement voulu.

On pouvait aussi étudier la fonction $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ et vérifier qu'elle est à valeurs dans $[-1, 1]$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'après ce qui précède, les deux membres de l'équation sont bien définis, et ils appartiennent à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. Comme la fonction $\sin$ est bijective sur cet intervalle, on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2} = \operatorname{Arctan} x &\Leftrightarrow \sin \left(\operatorname{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2} \right) = \sin(\operatorname{Arctan} x) \\ &\Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ &\Leftrightarrow 2x\sqrt{1+x^2} = x(1+x^2) \\ &\Leftrightarrow 2x = x\sqrt{1+x^2} \\ &\Leftrightarrow x \left(\sqrt{1+x^2} - 2 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \sqrt{1+x^2} = 2 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 1+x^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 = 3 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

EXERCICE 3

1) On intègre par parties :

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln^2 x \, dx &= [x \ln^2 x]_1^e - \int_1^e x \left(2 \frac{1}{x} \ln x \right) dx \\ &= e - 2 \int_1^e \ln x \, dx \\ &= e - 2[x \ln x - x]_1^e \\ &= e - 2. \end{aligned}$$

2) On pose $y = \sqrt{x}$. Alors $x = y^2$ donc $dx = 2y dy$ et :

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^2 y e^y dy.$$

Ensuite on intègre par parties :

$$2 \int_1^2 y e^y dy = 2 \left([y e^y]_1^2 - \int_1^2 e^y dy \right) = 2(2e^2 - e - [e^y]_1^2) = 2e^2.$$

3) On reconnaît une forme uu' qui est la dérivée de $\frac{u^2}{2}$:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi/4} \tan x \times \frac{1}{\cos^2 x} dx = \left[\frac{\tan^2 x}{2} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}.$$

4) On effectue le changement de variable $y = \sqrt{x}$. Alors $x = y^2$, donc $dx = 2y dy$, et :

$$\int_{1/2}^{3/4} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{2y}{y\sqrt{1-y^2}} dy = 2 \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 2[\operatorname{Arcsin} y]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} = 2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{6}.$$