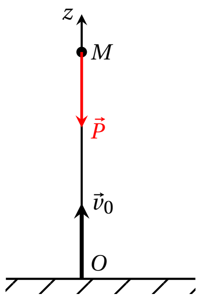
Corrigé DM9

Exercice : Chute avec et sans frottement



1. On utilise un repère (Oz) vertical ascendant dont l'origine est au niveau du lancer. On suppose que le mouvement commence à $t=0$. En l'absence de frottement la masse n'est soumise qu'à son poids $\vec{P}$. On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $m\vec{a}=\vec{P} \iff \vec{a}=\vec{g}$. On projette sur $\vec{u}_z$: $\ddot{z}=-g$.

On intègre deux fois cette équation avec les conditions initiales $\dot{z}(0)=v_0$ et $z(0)=0$ pour obtenir la vitesse et la position de la masse à tout instant : $\dot{z}(t)=-gt+v_0$ et $z(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t$.

La masse s'arrête lorsque $\dot{z}=0$, pour $t=\frac{v_0}{g}$ et son altitude vaut $\boxed{H_0=\frac{v_0^2}{2g}}$.

2. On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse : $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{P}+\vec{F}$. On projette sur $\vec{u}_z$:

$$m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=-mg-\alpha v_z \iff \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}+\frac{\alpha}{m}v_z=-g$$

On reconnaît le type d'équation différentielle associée aux régime transitoires du premier ordre. Ici le temps caractéristique est $\tau=m/\alpha$. On trouve la solution particulière en résolvant l'équation sans dérivée : $v_{z,p}=-\frac{mg}{\alpha}=-v_\ell$. La solution générale s'écrit $v_z(t)=A\mathrm{e}^{-t/\tau}-v_\ell$. Avec la condition initiale $v_z(0)=v_0$ on trouve que $\boxed{v_z(t)=(v_0+v_\ell)\mathrm{e}^{-t/\tau}-v_\ell}$.

On intègre à nouveau pour obtenir la position : $z(t)=-\tau(v_0+v_\ell)\mathrm{e}^{-t/\tau}-v_\ell t+C$. La condition initiale $z(0)=0$ impose que $C=\tau(v_0+v_\ell)$ d'où : $\boxed{z(t)=\tau(v_0+v_\ell)\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)-v_\ell t}$.

3. L'ascension s'arrête lorsque $v_z=0$, à la date $\boxed{t_{\text{sommet}}=\tau\ln\left(1+\frac{v_0}{v_\ell}\right)}$.

4. La hauteur du lancer s'identifie à $H=z(t_{\text{sommet}})$:

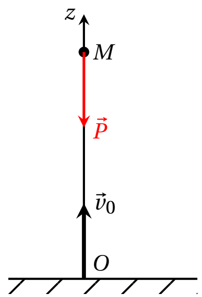
$$H=\tau(v_0+v_\ell)\left(1-\frac{v_\ell}{v_0+v_\ell}\right)-v_\ell\tau\ln\left(1+\frac{v_0}{v_\ell}\right)=v_0\tau-v_\ell\tau\ln\left(1+\frac{v_0}{v_\ell}\right)\iff\boxed{H=v_\ell\tau\,(\xi-\ln(1+\xi))}$$

5. En utilisant les données de l'énoncé on écrit $\xi=\frac{v_0}{v_\ell}=\frac{\alpha v_0}{mg}$. On voit que ξ tend vers zéro dans la limite $\alpha\to0$ (mouvement sans frottements). Pour des frottements suffisamment faibles on pourra effectivement considérer que $\xi\ll1$. Dans ce cas la hauteur de lancer s'exprime de la façon approchée suivante : $H\simeq v_\ell\tau\left(\frac{\xi^2}{2}-\frac{\xi^3}{3}\right)=\frac{v_0^2\tau}{2v_\ell}\left(1-\frac{2v_0}{3v_\ell}\right)$. En remplaçant v_ℓ et τ par leur expression on trouve : $\boxed{H\simeq H_0\left(1-\frac{2\alpha v_0}{3mg}\right)}$.

Premièrement on trouve $H<H_0$ ce qui est logique puisque les frottements s'opposent au mouvement d'ascension de la masse ; elle s'élève donc moins haut avec frottement que sans pour une vitesse initiale v_0 donnée. Deuxièmement on retrouve $H=H_0$ dans la limite d'un mouvement sans frottement $(\alpha=0)$, ce qui était attendu. **Le résultat obtenu est cohérent**.

Corrigé DM9

Exercice : Chute avec et sans frottement



1. On utilise un repère (Oz) vertical ascendant dont l'origine est au niveau du lancer. On suppose que le mouvement commence à $t=0$. En l'absence de frottement la masse n'est soumise qu'à son poids $\vec{P}$. On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $m\vec{a}=\vec{P} \iff \vec{a}=\vec{g}$. On projette sur $\vec{u}_z$: $\ddot{z}=-g$.

On intègre deux fois cette équation avec les conditions initiales $\dot{z}(0)=v_0$ et $z(0)=0$ pour obtenir la vitesse et la position de la masse à tout instant : $\dot{z}(t)=-gt+v_0$ et $z(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t$.

La masse s'arrête lorsque $\dot{z}=0$, pour $t=\frac{v_0}{g}$ et son altitude vaut $\boxed{H_0=\frac{v_0^2}{2g}}$.

2. On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse : $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{P}+\vec{F}$. On projette sur $\vec{u}_z$:

$$m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=-mg-\alpha v_z \iff \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}+\frac{\alpha}{m}v_z=-g$$

On reconnaît le type d'équation différentielle associée aux régime transitoires du premier ordre. Ici le temps caractéristique est $\tau=m/\alpha$. On trouve la solution particulière en résolvant l'équation sans dérivée : $v_{z,p}=-\frac{mg}{\alpha}=-v_\ell$. La solution générale s'écrit $v_z(t)=A\mathrm{e}^{-t/\tau}-v_\ell$. Avec la condition initiale $v_z(0)=v_0$ on trouve que $\boxed{v_z(t)=(v_0+v_\ell)\mathrm{e}^{-t/\tau}-v_\ell}$.

On intègre à nouveau pour obtenir la position : $z(t)=-\tau(v_0+v_\ell)\mathrm{e}^{-t/\tau}-v_\ell t+C$. La condition initiale $z(0)=0$ impose que $C=\tau(v_0+v_\ell)$ d'où : $\boxed{z(t)=\tau(v_0+v_\ell)\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)-v_\ell t}$.

3. L'ascension s'arrête lorsque $v_z=0$, à la date $\boxed{t_{\text{sommet}}=\tau\ln\left(1+\frac{v_0}{v_\ell}\right)}$.

4. La hauteur du lancer s'identifie à $H=z(t_{\text{sommet}})$:

$$H=\tau(v_0+v_\ell)\left(1-\frac{v_\ell}{v_0+v_\ell}\right)-v_\ell\tau\ln\left(1+\frac{v_0}{v_\ell}\right)=v_0\tau-v_\ell\tau\ln\left(1+\frac{v_0}{v_\ell}\right)\iff\boxed{H=v_\ell\tau\,(\xi-\ln(1+\xi))}$$

5. En utilisant les données de l'énoncé on écrit $\xi=\frac{v_0}{v_\ell}=\frac{\alpha v_0}{mg}$. On voit que ξ tend vers zéro dans la limite $\alpha\to0$ (mouvement sans frottements). Pour des frottements suffisamment faibles on pourra effectivement considérer que $\xi\ll1$. Dans ce cas la hauteur de lancer s'exprime de la façon approchée suivante : $H\simeq v_\ell\tau\left(\frac{\xi^2}{2}-\frac{\xi^3}{3}\right)=\frac{v_0^2\tau}{2v_\ell}\left(1-\frac{2v_0}{3v_\ell}\right)$. En remplaçant v_ℓ et τ par leur expression on trouve : $\boxed{H\simeq H_0\left(1-\frac{2\alpha v_0}{3mg}\right)}$.

Premièrement on trouve $H<H_0$ ce qui est logique puisque les frottements s'opposent au mouvement d'ascension de la masse ; elle s'élève donc moins haut avec frottement que sans pour une vitesse initiale v_0 donnée. Deuxièmement on retrouve $H=H_0$ dans la limite d'un mouvement sans frottement $(\alpha=0)$, ce qui était attendu. **Le résultat obtenu est cohérent**.