Devoir n°10 (non surveillé)

EXERCICE 1

On considère l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y'' + y'\tan(x) + y\cos^2(x) = 0,$$

dont on cherche les solutions définies sur l'intervalle $I =]-\pi/2, \pi/2[$.

Soit y une fonction deux fois dérivable sur I. On considère la fonction z définie sur $]-1,1[$ par $z(t) = y(\operatorname{Arcsin} t)$: on a ainsi $y(x) = z(\sin x)$ pour tout $x \in I$.

1) Exprimer $y'(x)$ et $y''(x)$ à l'aide de z' et z''.

2) Montrer que y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur $]-1,1[$ d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (E') que l'on précisera.

3) Résoudre (E') puis (E).

EXERCICE 2

Soit E un ensemble et soient A, B et C trois sous-ensembles de E. Montrer que :

$$A \subset B \subset C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C.$$

On n'utilisera pas les fonctions indicatrices. Les réponses non rédigées rigoureusement ne seront pas lues.

EXERCICE 3

1) Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n\,//\,3 \end{array}$ où $n\,//\,3$ désigne le quotient dans la division euclidienne de n par 3. L'application f est-elle injective, surjective, bijective ? Déterminer $f(\{0,\dots,10\})$ et $f^{-1}(\{0\})$.

2) Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n\,\%\,3 \end{array}$ où $n\,\%\,3$ désigne le reste dans la division euclidienne de n par 3. L'application f est-elle injective, surjective, bijective ? Déterminer $f(\mathbb{N})$ et $f^{-1}(\{0\})$.

3) Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cc} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ n-1 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array}$. L'application f est-elle injective, surjective, bijective ? Déterminer $f(\{0,\dots,10\})$, $f^{-1}(\{0,\dots,10\})$ et $f(\mathbb{N})$.

4) Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,x) \end{array}$. Déterminer $f \circ f$. Que peut-on en déduire ?

5) Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, y+z, z) \end{array}$. Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

EXERCICE 4

Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer que si $g \circ f$ est injective et que f est surjective, alors g est injective.