

Corrigé DM10

Exercice : Saut d'un ressort

1. La masse est soumise à son poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_x$ et à la force de rappel élastique $\vec{F} = -k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0)\vec{u}_z$ exercée par le ressort. Elle est en équilibre ; on applique le principe fondamental de la statique à la masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$. On projette sur $\vec{u}_x$:

$$-mg - k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) = 0 \iff \ell_{\text{eq}} = \ell_0 - \frac{mg}{k}$$

2. On applique maintenant le principe fondamental de la dynamique dans le cas où la masse est en mouvement : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}$. L'origine du repère est placée au niveau de la position d'équilibre donc la longueur du ressort, dans un état quelconque, s'écrit $\ell = \ell_{\text{eq}} + x$. Ainsi la force de rappel vaut désormais $\vec{F} = -k(x + \ell_{\text{eq}} - \ell_0)\vec{u}_x$. On projette le PFD sur $\vec{u}_x$:

$$m\ddot{x} = -mg - k\left(x - \frac{mg}{k}\right) \iff \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

La pulsation propre vaut $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et la période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

3. La solution générale de cette équation différentielle est $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. Avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = v_0$ et $x(0) = 0$, on montre que $A = 0$ et $B = \frac{v_0}{\omega_0}$ d'où $x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$.

4. La masse M est soumise à son poids $\vec{P}_1 = -Mg\vec{u}_x$, à la force de rappel élastique $\vec{F}_1 = k(x + \ell_{\text{eq}} - \ell_0)\vec{u}_x$ exercée par le ressort et à la réaction normale $\vec{N}_1 = N_1\vec{u}_x$ du sol.

5. On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse M . On suppose que la masse est encore posée sur le sol, son accélération est donc nulle : $\vec{P}_1 + \vec{F}_1 + \vec{N}_1 = \vec{0}$. On projette sur $\vec{u}_x$:

$$-Mg + k\left(x - \frac{mg}{k}\right) + N_1 = 0 \iff N_1 = -kx + (m + M)g$$

On remplace $x(t)$ par son expression : $N_1(t) = (m + M)g - \sqrt{km}v_0 \sin(\omega_0 t)$.

6. La masse décolle si la réaction N_1 s'annule. D'après l'expression trouvée à la question précédente, $N_1(t)$ oscille entre $(m + M)g + \sqrt{km}v_0$ et $(m + M)g - \sqrt{km}v_0$. $N_1(t)$ ne s'annule qu'à la condition que :

$$(m + M)g - \sqrt{km}v_0 \leq 0 \iff v_0 \geq v_\ell = \frac{(m + M)g}{\sqrt{km}}$$

Corrigé DM10

Exercice : Saut d'un ressort

1. La masse est soumise à son poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_x$ et à la force de rappel élastique $\vec{F} = -k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0)\vec{u}_z$ exercée par le ressort. Elle est en équilibre ; on applique le principe fondamental de la statique à la masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$. On projette sur $\vec{u}_x$:

$$-mg - k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) = 0 \iff \ell_{\text{eq}} = \ell_0 - \frac{mg}{k}$$

2. On applique maintenant le principe fondamental de la dynamique dans le cas où la masse est en mouvement : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}$. L'origine du repère est placée au niveau de la position d'équilibre donc la longueur du ressort, dans un état quelconque, s'écrit $\ell = \ell_{\text{eq}} + x$. Ainsi la force de rappel vaut désormais $\vec{F} = -k(x + \ell_{\text{eq}} - \ell_0)\vec{u}_x$. On projette le PFD sur $\vec{u}_x$:

$$m\ddot{x} = -mg - k\left(x - \frac{mg}{k}\right) \iff \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

La pulsation propre vaut $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et la période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

3. La solution générale de cette équation différentielle est $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. Avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = v_0$ et $x(0) = 0$, on montre que $A = 0$ et $B = \frac{v_0}{\omega_0}$ d'où $x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$.

4. La masse M est soumise à son poids $\vec{P}_1 = -Mg\vec{u}_x$, à la force de rappel élastique $\vec{F}_1 = k(x + \ell_{\text{eq}} - \ell_0)\vec{u}_x$ exercée par le ressort et à la réaction normale $\vec{N}_1 = N_1\vec{u}_x$ du sol.

5. On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse M . On suppose que la masse est encore posée sur le sol, son accélération est donc nulle : $\vec{P}_1 + \vec{F}_1 + \vec{N}_1 = \vec{0}$. On projette sur $\vec{u}_x$:

$$-Mg + k\left(x - \frac{mg}{k}\right) + N_1 = 0 \iff N_1 = -kx + (m + M)g$$

On remplace $x(t)$ par son expression : $N_1(t) = (m + M)g - \sqrt{km}v_0 \sin(\omega_0 t)$.

6. La masse décolle si la réaction N_1 s'annule. D'après l'expression trouvée à la question précédente, $N_1(t)$ oscille entre $(m + M)g + \sqrt{km}v_0$ et $(m + M)g - \sqrt{km}v_0$. $N_1(t)$ ne s'annule qu'à la condition que :

$$(m + M)g - \sqrt{km}v_0 \leq 0 \iff v_0 \geq v_\ell = \frac{(m + M)g}{\sqrt{km}}$$