

DM de physique n° 11

Exercice : Le toboggan

Nous sommes en été et un enfant dévale un toboggan aquatique. Le toboggan est représenté sur la figure ci-contre. Pour l'étude du mouvement, on propose le modèle suivant :

- L'enfant de masse $m = 50\text{kg}$, est assimilé à un point matériel M .
- Le toboggan, de forme hélicoïdale, débute en A et se termine en B après 3 tours exactement ; il s'enroule sur un cylindre vertical de rayon $R = 5\text{m}$. **On néglige tout frottement.**
- À chaque tour complet, l'enfant descend d'une hauteur h .

Le point M , initialement immobile en A , est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) , z étant la cote du point M sur l'axe de symétrie de la trajectoire, choisi **vertical descendant**.

L'origine O de l'axe (Oz) est choisie à l'intersection de cet axe et du plan horizontal passant par A .

On donne l'accélération de la pesanteur $g = 10\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

On note $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ la base locale orthonormée directe associée au système des coordonnées cylindriques.

1. Les équations de la trajectoire sont données par les relations : $r(\theta) = R$ et $z(\theta) = \gamma\theta$ où γ est une constante positive. Exprimer h en fonction de γ .
2. Montrer que l'énergie mécanique de l'enfant peut se mettre sous la forme : $E_m = \frac{1}{2}A\dot{z}^2 - Bz$, où A et B sont des constantes à expliciter en fonction des données.
3. Déterminer la vitesse v_s de l'enfant en sortie de toboggan en fonction de g et h .
4. Déterminer l'équation différentielle satisfait par $z(t)$ et en déduire la durée T de la descente en fonction de A , B et h .
5. Si on prend en compte une force de frottement de norme constante F , exprimer l'énergie perdue par l'enfant au cours de la descente, en fonction de F , R et γ .

