Devoir n°12 (non surveillé)

EXERCICE 1 - Suites homographiques

1) Soient a, b, c, d quatre réels, avec c non nul. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ par $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

a) Étudier les variations de f. On discutera selon le signe de $ad-bc$. On précisera les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

b) Montrer que f admet au plus deux points fixes (un point fixe de f est un réel x tel que $f(x) = x$).

2) On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = 1$ et vérifiant la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est définie par $f(x) = \dfrac{x+6}{x+2}$.

a) Montrer que l'intervalle $[1, +\infty[$ est stable par f, c'est-à-dire que $f([1, +\infty[) \subset [1, +\infty[$. En déduire que $u_n \in [1, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que f a deux points fixes x_1 et x_2 que l'on déterminera (on prendra $x_1 < x_2$).

c) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{u_n - x_1}{u_n - x_2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique.

d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est définie par $f(x) = \dfrac{3x-2}{2x-1}$.

a) Montrer que l'intervalle $[1, 2]$ est stable par f. En déduire que $u_n \in [1, 2]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que f a un unique point fixe x_0.

c) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n. Pour cela, on pourra introduire la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{u_n - x_0}$, et montrer que cette suite est arithmétique.

EXERCICE 2

À tout entier naturel n on associe l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t\, dt$.

1) Calculer I_0 et I_1.

2) Étudier la monotonie de la suite (I_n) et en déduire qu'elle est convergente. On notera L sa limite.

3) a) À l'aide d'un changement de variable, montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$.

b) En déduire un encadrement de I_n (on commencera par encadrer $1+x^2$ lorsque $x \in [0, 1]$) puis déterminer la valeur de L.

4) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire les valeurs de I_2 et I_3.

5) a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n = \dfrac{1}{2(n+1)} + \dfrac{2}{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2} dx$.

b) En procédant comme en 3)b), montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2} dx = 0$.

c) En déduire la limite de nI_n lorsque n tend vers $+\infty$.

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

a) Montrer que $S_n = I_0 + (-1)^n I_{2n+2}$. Indication : utiliser 4)a).

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.