Correction du DNS 9

EXERCICE 1

1) On factorise le dénominateur : $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$, puis on décompose en éléments simples : on sait qu'il existe des réels a et b tels que

$$(*)\qquad \frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}.$$

En multipliant les deux membres de l'égalité $(*)$ par $x+1$ et en prenant $x=-1$, on obtient $a=1$.

En multipliant les deux membres de l'égalité $(*)$ par $x+2$ et en prenant $x=-2$, on obtient $b=-1$.

Ainsi

$$\int_0^1\frac{dx}{(x+1)(x+2)}=\int_0^1\frac{dx}{x+1}-\int_0^1\frac{dx}{x+2}=[\ln(x+1)]_0^1-[\ln(x+2)]_0^1=2\ln 2-\ln 3.$$

2) On factorise le numérateur :

$$\int_0^1\frac{dx}{x^2+6x+9}=\int_0^1\frac{dx}{(x+3)^2}=\left[-\frac{1}{x+3}\right]_0^1=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{12}.$$

3) On intègre par parties puis on décompose en éléments simples :

$$\begin{aligned}\int_1^2\frac{\ln x}{(1+x)^2}\,dx&=\left[-\frac{\ln x}{1+x}\right]_1^2+\int_1^2\frac{1}{x(1+x)}\,dx\\&=-\frac{\ln 2}{3}+\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)dx\\&=-\frac{\ln 2}{3}+[\ln x-\ln(1+x)]_1^2\\&=\frac{5\ln 2}{3}-\ln 3.\end{aligned}$$

EXERCICE 2

1) On a

$$I_0=\int_0^1\sqrt{1-x}\,dx=\int_0^1(1-x)^{1/2}\,dx=\left[-\frac{(1-x)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1=\frac{2}{3}.$$

2) Soit $n\in\mathbb{N}$. Posons $u(x)=x^n$ et $v(x)=-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}$ pour tout $x\in[0,1]$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, $u'(x)=nx^{n-1}$ et $v'(x)=\sqrt{1-x}$ pour tout $x\in[0,1]$. La formule d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}I_n&=\left[-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}x^n\right]_0^1+\frac{2n}{3}\int_0^1x^{n-1}(1-x)^{3/2}\,dx\\&=\frac{2n}{3}\int_0^1x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}\,dx\\&=\frac{2n}{3}\int_0^1x^{n-1}\sqrt{1-x}\,dx-\frac{2n}{3}\int_0^1x^n\sqrt{1-x}\,dx\\&=\frac{2n}{3}I_{n-1}-\frac{2n}{3}I_n.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{2n+3}{3}I_n=\frac{2n}{3}I_{n-1}$$

et donc que

$$I_n=\frac{2n}{2n+3}I_{n-1}.$$

3) On raisonne par récurrence.

On a vu que $I_0=\frac{2}{3}$ et pour $n=0$ on a $\frac{2^{2n+3}n!(n+2)!}{(2n+4)!}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$ également.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $I_n=\frac{2^{2n+3}n!(n+2)!}{(2n+4)!}$ et montrons que $I_{n+1}=\frac{2^{2n+5}(n+1)!(n+3)!}{(2n+6)!}$.

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \frac{2n+2}{2n+5} I_n \\
&= \frac{2(n+1)}{2n+5} \frac{2^{2n+3} n!(n+2)!}{(2n+4)!} \\
&= \frac{2^{2n+4}(n+1)!(n+2)!}{(2n+5)!} \\
&= \frac{2^{2n+4}(n+1)!(n+2)!2(n+3)}{(2n+5)!(2n+6)} \\
&= \frac{2^{2n+5}(n+1)!(n+3)!}{(2n+6)!}.
\end{aligned}$$

Le théorème de récurrence permet de conclure.

EXERCICE 3

1) La solution générale de l'équation homogène $xy' - y = 0$ est définie par

$$\forall\, x \in]0, +\infty[,\ y(x) = \lambda x$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pour trouver une solution particulière de l'équation avec second membre on utilise la méthode de variation de la constante (en posant $\psi(x) = x$ et $y = z\psi$) qui mène à

$$z'(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

On trouve une primitive en intégrant par parties :

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}.$$

La fonction y définie par $y(x) = -\ln x - 1$ est donc une solution particulière de l'équation.

Les solutions de l'équation sont donc les fonctions définies par

$$\forall\, x \in]0, +\infty[,\ y(x) = -\ln x - 1 + \lambda x$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) La solution générale de l'équation homogène $\sqrt{1-x^2}\, y' + y = 0$ est définie par

$$\forall\, x \in]-1, 1[,\ y(x) = \lambda e^{-\operatorname{Arcsin} x}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

On voit que la fonction constante $x \mapsto 1$ est une solution de l'équation avec second membre.

Les solutions de l'équation sont donc les fonctions définies par

$$\forall\, x \in]-1, 1[,\ y(x) = 1 + \lambda e^{-\operatorname{Arcsin} x}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

3) La solution générale de l'équation homogène $2x(1+x)y' + (1+x)y = 0$ est définie par

$$\forall\, x \in]0, +\infty[,\ y(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{x}}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pour trouver une solution particulière de l'équation avec second membre on utilise la méthode de variation de la constante (en posant $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $y = z\psi$) qui mène à

$$z'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x(1+x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

On trouve une primitive en effectuant le changement de variable $t = \sqrt{x}$ (donc $x = t^2$ et $dx = 2t\, dt$) :

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)} = \int \frac{2t}{2t(1+t^2)} dt = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{Arctan} t = \operatorname{Arctan} \sqrt{x}.$$

La fonction y définie par $y(x) = \dfrac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ est donc une solution particulière de l'équation.

Les solutions de l'équation sont donc les fonctions définies par

$$\forall\, x \in \,]0, +\infty[,\ y(x) = \frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x}}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.