Correction du DNS 10

EXERCICE 1

1) Pour tout $x \in I$ on a

$$y'(x) = z'(\sin x)\cos x \quad \text{et} \quad y''(x) = z''(\sin x)\cos^2 x - z'(\sin x)\sin x.$$

2) Pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} y''(x) + y'(x)\tan x + y(x)\cos^2 x = 0 &\Leftrightarrow z''(\sin x)\cos^2 x - z'(\sin x)\sin x + z'(\sin x)\cos x \tan x + z(\sin x)\cos^2 x = 0 \\ &\Leftrightarrow z''(\sin x)\cos^2 x - z'(\sin x)\sin x + z'(\sin x)\sin x + z(\sin x)\cos^2 x = 0 \\ &\Leftrightarrow (z''(\sin x) + z(\sin x))\cos^2 x = 0 \\ &\Leftrightarrow z''(\sin x) + z(\sin x) = 0 \end{aligned}$$

car $\cos^2 x$ est non nul sur I.

La fonction y est donc solution de (E) sur I si et seulement la fonction z est solution de (E') : $z'' + z = 0$ sur $]-1,1[$ (car sin définit une bijection de I dans $]-1,1[$).

3) L'équation caractéristique associée à (E') est $r^2 + 1 = 0$ et ses racines sont i et $-i$. Les solutions de (E') sont donc les fonctions définies par

$$\forall\, t \in\,]-1,1[\,, z(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies par

$$\forall\, x \in I, y(x) = \alpha \cos(\sin x) + \beta \sin(\sin x)$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 2

$(\Rightarrow)$ Supposons que $A \subset B \subset C$. L'inclusion $A \subset B$ implique que $A \cup B = B$, et l'inclusion $B \subset C$ implique que $B \cap C = B$. Ainsi $A \cup B = B \cap C$.

$(\Rightarrow)$ Supposons que $A \cup B = B \cap C$. On a, d'une part, $A \subset A \cup B$ donc $A \subset B \cap C \subset B$ et, d'autre part, $B \subset A \cup B$ donc $B \subset B \cap C \subset C$. Ainsi $A \subset B \subset C$.

L'équivalence est établie.

EXERCICE 3

1) On a $f(0) = f(1) = 0$ donc f n'est pas injective.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n = f(3n)$ donc f est surjective.

Enfin, $f(\{0,\dots,10\}) = \{0,1,2,3\}$ et $f^{-1}(\{0\}) = \{0,1,2\}$.

2) On a $f(0) = f(3) = 0$ donc f n'est pas injective.

L'application f est à valeurs dans $\{0,1,2\}$ donc elle n'est pas surjective (seuls 0, 1 et 2 ont des antécédents par f).

Enfin, $f(\mathbb{N}) = \{0,1,2\}$ et $f^{-1}(\{0\}) = \{3n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ (car $f(n) = 0$ si et seulement si n est divisible par 3).

3) On a $f(0) = f(1) = 0$ donc f n'est pas injective.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ est pair donc f n'est pas surjective (les entiers impairs n'ont pas d'antécédents par f).

Enfin, $f(\{0,\dots,10\}) = \{0,2,4,6,8,10\}$, $f(\mathbb{N}) = \{2n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ et $f^{-1}(\{0,\dots,10\}) = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$.

4) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $f \circ f\,(x,y) = f(f(x,y)) = f(y,x) = (x,y)$, donc $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$. On en déduit que f est bijective et que $f^{-1} = f$.

5) Soit $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$f(x,y,z) = (x',y',z') \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z &=& x' \\ y+z &=& y' \\ z &=& z' \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& x'-y' \\ y &=& y'-z' \\ z &=& z' \end{array} \right. \Leftrightarrow (x,y,z) = (x'-y', y'-z', z').$$

Par conséquent f est bijective et $f^{-1}(x',y',z') = (x'-y', y'-z', z')$ pour tout $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$.

EXERCICE 4

Supposons $g \circ f$ injective et f surjective. Montrons que g est injective.

Soient $y_1, y_2 \in F$ tels que $g(y_1) = g(y_2)$. Puisque f est surjective, il existe $x_1 \in E$ tel que $y_1 = f(x_1)$ et il existe $x_2 \in E$ tel que $y_2 = f(x_2)$. On a donc $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, i.e. $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$. Or $g \circ f$ est injective donc $x_1 = x_2$ et par suite $f(x_1) = f(x_2)$ d'où $y_1 = y_2$.

L'application g est bien injective.