Devoir n°13 (non surveillé)

EXERCICE 1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$ et la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

1) Calculer S_0, S_1 et S_2.

2) Étudier la monotonie de la suite (S_n).

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{4n+2}$ et en déduire que $u_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n}{2}$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

c) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité $S_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{2^n}$.

4) Montrer que (S_n) est convergente et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n \leqslant 2$.

EXERCICE 2

On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que $u_0 = 1$, $v_0 = 2$, et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n}.$$

1) Calculer des valeurs approchées de u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 et v_3 à 10^{-2} près. Que peut-on conjecturer ?

2) a) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \dfrac{v_n^2 - u_n^2}{4}$.

b) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n^2 - u_n^2 = \dfrac{3}{4^n}$.

c) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$.

d) Étudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n).

e) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite, que l'on notera ℓ.

f) Déterminer une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

3) Soit θ un réel. À tout entier naturel non nul n on associe le produit $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\theta}{2^k}$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \sin\dfrac{\theta}{2^n} = \dfrac{1}{2^n}\sin\theta$.

b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^n \sin\frac{\theta}{2^n}$, et en déduire la limite de la suite (p_n). On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

4) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 4\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \cos\frac{\pi}{3.2^k}$ et $u_n = v_n \cos\dfrac{\pi}{3.2^n}$.

b) En déduire la valeur exacte de ℓ.