Correction du DNS 12

EXERCICE 1

1) a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$ et, pour tout $x \neq -d/c$ on a

$$f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}.$$

Si $ad - bc = 0$, la fonction est constante égale à b/d.

Si $ad - bc > 0$, la fonction est strictement croissante sur $]-\infty, -d/c[$ et sur $]-d/c, +\infty[$. En $-d/c$ elle tend vers $+\infty$ à gauche et $-\infty$ à droite.

Si $ad - bc < 0$, la fonction est strictement décroissante sur $]-\infty, -d/c[$ et sur $]-d/c, +\infty[$. En $-d/c$ elle tend vers $-\infty$ à gauche et $+\infty$ à droite.

Enfin $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d} = \dfrac{x(a + b/x)}{x(c + d/x)} = \dfrac{a + b/x}{c + d/x}$ tend vers a/c en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Soit $x \neq -d/c$. On a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{ax + b}{cx + d} = x \Leftrightarrow ax + b = cx^2 + dx \Leftrightarrow cx^2 + (d - a)x - b = 0.$$

C'est une équation du second degré : elle a au plus deux solutions réelles. Ainsi f admet au plus deux points fixes.

2) a) D'après l'étude menée en 1)a) la fonction f est strictement décroissante sur $]-2, +\infty[$ et elle tend vers 1 en $+\infty$. Par conséquent $f([1, +\infty[) \subset [1, +\infty[$.

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, +\infty[$.

C'est vrai pour $n = 0$ car $u_0 = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \in [1, +\infty[$. Alors $u_n \neq -2$, donc on peut calculer u_{n+1}, et $f([1, +\infty[) \subset [1, +\infty[$ donc $u_{n+1} \in [1, +\infty[$.

Le théorème de récurrence permet de conclure.

b) On a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ou } x = -3).$$

La fonction f a donc deux points fixes : -3 et 2.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 3}{u_{n+1} - 2} = \frac{\frac{u_n+6}{u_n+2} + 3}{\frac{u_n+6}{u_n+2} - 2} = \frac{u_n + 6 + 3u_n + 6}{u_n + 6 - 2u_n - 4} = \frac{4u_n + 12}{-u_n + 2} = -4\frac{u_n + 3}{u_n - 2} = -4v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison -4.

d) On en déduit que $v_n = v_0(-4)^n = (-4)^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or :

$$v_n = \frac{u_n + 3}{u_n - 2} \Leftrightarrow u_n v_n - 2v_n = u_n + 3 \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = 2v_n + 3 \Leftrightarrow u_n = \frac{2v_n + 3}{v_n - 1} \Leftrightarrow u_n = \frac{2(-4)^{n+1} + 3}{(-4)^{n+1} - 1},$$

et donc

$$u_n = \frac{2 + 3/(-4)^{n+1}}{1 - 1/(-4)^{n+1}} \xrightarrow{n \to +\infty} 2.$$

3) a) D'après l'étude menée en 1)a) la fonction f est strictement croissante sur $]1/2, +\infty[$. Par conséquent $f([1, 2]) = [f(1), f(2)] = [1, 4/3] \subset [1, 2]$.

En raisonnant comme en 2)a) on en déduit que la suite (u_n) est à valeurs dans $[1, 2]$ (elle est donc bien définie car u_n n'est jamais égal à $1/2$).

b) On a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

La fonction f a donc un seul point fixe : 1.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{\frac{3u_n-2}{2u_n-1} - 1} = \frac{2u_n - 1}{3u_n - 2 - 2u_n + 1} = \frac{2u_n - 1}{u_n - 1} = \frac{2u_n - 2 + 1}{u_n - 1} = 2 + \frac{1}{u_n - 1} = 2 + v_n$$

donc la suite (v_n) est arithmétique de raison 2.

On en déduit que $v_n = v_0 + 2n = 1 + 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or :

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1} \Leftrightarrow u_n - 1 = \frac{1}{v_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{v_n} + 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{2n+1} + 1 = \frac{2n+2}{2n+1}.$$

EXERCICE 2

1) On a

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,dx = \frac{\pi}{4}$$

et

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = [-\ln(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}\ln 2 + \ln 2 = \frac{\ln 2}{2}.$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1} x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^{n+1} x - \tan^n x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(\tan x - 1)\,dx.$$

Or pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ on a $0 \leqslant \tan x \leqslant 1$, donc $\tan^n x(\tan x - 1) \leqslant 0$. Par conséquent $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$: la suite (I_n) est décroissante.

De plus on a $I_n \geqslant 0$ pour tout n donc la suite (I_n) est minorée par 0. Elle est donc convergente.

3) a) On pose $x = \tan t$. Alors $t = \operatorname{Arctan} x$ donc $dt = \dfrac{dx}{1+x^2}$, et donc $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx$.

b) Pour tout $x \in [0, 1]$, on a $1 \leqslant 1 + x^2 \leqslant 2$, donc $\dfrac{x^n}{2} \leqslant \dfrac{x^n}{1+x^2} \leqslant x^n$, et donc

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^n dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx \leqslant \int_0^1 x^n dx.$$

Or $\displaystyle\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, donc on obtient l'encadrement

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc par le théorème des gendarmes $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+2}}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x^2)}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

b) On a $I_0 + I_2 = 1$ donc $I_2 = \dfrac{\pi}{4} - 1$, et $I_1 + I_3 = \dfrac{1}{2}$ donc $I_3 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\ln 2}{2}$.

D'autre part, en passant à la limite dans l'égalité $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$, on obtient $L + L = 0$, d'où $L = 0$.

5) a) On intègre par parties ($u(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $u'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, $v'(x) = x^n$, $v(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$). On obtient

$$I_n = \left[\frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x^2}\right]_0^1 + \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2}dx.$$

b) Pour tout $x \in [0, 1]$, on a $1 \leqslant (1+x^2)^2 \leqslant 4$, donc $\dfrac{x^{n+2}}{4} \leqslant \dfrac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2} \leqslant x^{n+2}$, et donc

$$\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{4}dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2}dx \leqslant \int_0^1 x^{n+2}dx,$$

soit

$$\frac{1}{4(n+3)} \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2}dx \leqslant \frac{1}{n+3}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+3} = 0$, donc par le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2}dx = 0$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$nI_n = \frac{n}{2(n+1)} + \frac{2n}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2}dx.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$ donc d'après la question précédente

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = \frac{1}{2}.$$

6) a) Pour tout $k \in \{0,\ldots,n\}$ on a $\frac{1}{2k+1} = I_{2k+2} + I_{2k}$. Par conséquent

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(I_{2k+2}+I_{2k}) = I_2 + I_0 - I_4 - I_2 + I_6 + I_4 - \ldots + (-1)^n I_{2n+2} + (-1)^n I_{2n} = I_0 + (-1)^n I_{2n+2}.$$

On peut aussi raisonner par récurrence.

b) On a vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{2n+2} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = I_0 = \frac{\pi}{4}$.