Corrigé DM11

Exercice : Le toboggan

1. La hauteur h s'identifie au dénivelé Δz correspondant à un tour complet autour de l'axe de symétrie du toboggan, soit$\Delta\theta = 2\pi$. Or, d'après les équation de la trajectoire : $\Delta z = \gamma\Delta\theta$, donc $\boxed{h = 2\pi\gamma}$.

2. L'énergie mécanique de l'enfant vaut : $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - mgz$ (axe (Oz) descendant, origine choisie en $z = 0$). Le vecteur vitesse s'écrit dans la base cylindrique : $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$ donc $v = \sqrt{R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2}$. En utilisant $z = \gamma\theta$ on obtient $v = \dot{z}\sqrt{1 + \frac{R^2}{\gamma^2}}$. On en déduit l'expression de l'énergie mécanique : $E_m = \frac{1}{2}m\left[1 + \frac{R^2}{\gamma^2}\right]\dot{z}^2 - mgz$.

C'est conforme à l'expression attendue, avec $\boxed{A = m\left[1 + \frac{R^2}{\gamma^2}\right]}$ et $\boxed{B = mg}$.

3. En l'absence de frottement l'enfant est soumis à son poids $\vec{P}$ (force conservative) et à la réaction normale $\vec{N}$ du toboggan, qui ne travaille pas car elle est orthogonale au déplacement. On en déduit que l'énergie mécanique est constante. On traduit en équation la conservation de l'énergie mécanique entre le point A ($z = 0$, $v = 0$) et le point B ($z = 3h$, $v = v_s$) :

$$E_m = 0 = \frac{1}{2}mv_s^2 - 3mgh \iff \boxed{v_s = \sqrt{6gh}}$$

4. On applique le théorème de la puissance mécanique à l'enfant dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0 = A\dot{z}\ddot{z} - B\dot{z} = A\dot{z}\left(\ddot{z} - \frac{B}{A}\right)$.

L'enfant est en mouvement donc $\dot{z} \neq 0$. On en déduit l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$: $\boxed{\ddot{z} = \frac{B}{A}}$.

On intègre deux fois successivement avec les conditions initiales $\dot{z}(0) = 0$ et $z(0) = 0$ (on choisit $t = 0$ pour le début de la glissade), on obtient : $\boxed{z(t) = \frac{B}{2A}t^2}$.

La durée de la descente s'identifie à la date à laquelle $z = 3h$: $z(T) = 3h \iff \boxed{T = \sqrt{\frac{6Ah}{B}}}$.

5. La force de frottement est à tout instant colinéaire et de sens contraire au vecteur vitesse $\vec{v}$ donc la puissance de cette force vaut $\mathscr{P}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{v} = -Fv$. Le travail de la force de frottement, entre A et B, vaut :

$$W(\vec{F}) = \int_0^T \mathscr{P}(\vec{F})\mathrm{d}t = -F\int_0^T v\mathrm{d}t$$

D'après les calculs de la question 2 : $v = \dot{z}\sqrt{1 + \frac{R^2}{\gamma^2}}$. On en déduit que :

$$W(\vec{F}) = -F\sqrt{1 + \frac{R^2}{\gamma^2}}\int_0^T \dot{z}\mathrm{d}t = -F\sqrt{1 + \frac{R^2}{\gamma^2}}\int_0^{3h}\mathrm{d}z = -3Fh\sqrt{1 + \frac{R^2}{\gamma^2}}$$

Comme cette force de frottement est la seule force non conservative qui travaille au cours de la descente, on en déduit que l'énergie perdue par l'enfant au cours de la descente vaut :

$$\mathscr{E}_{\text{perdue}} = -W(\vec{F}) = 3Fh\sqrt{1 + \frac{R^2}{\gamma^2}} \iff \boxed{\mathscr{E}_{\text{perdue}} = 6\pi F\sqrt{\gamma^2 + R^2}}$$

Corrigé DM11

Exercice : Le toboggan

1. La hauteur h s'identifie au dénivelé Δz correspondant à un tour complet autour de l'axe de symétrie du toboggan, soit$\Delta\theta = 2\pi$. Or, d'après les équation de la trajectoire : $\Delta z = \gamma\Delta\theta$, donc $\boxed{h = 2\pi\gamma}$.

2. L'énergie mécanique de l'enfant vaut : $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - mgz$ (axe (Oz) descendant, origine choisie en $z = 0$). Le vecteur vitesse s'écrit dans la base cylindrique : $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$ donc $v = \sqrt{R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2}$. En utilisant $z = \gamma\theta$ on obtient $v = \dot{z}\sqrt{1 + \frac{R^2}{\gamma^2}}$. On en déduit l'expression de l'énergie mécanique : $E_m = \frac{1}{2}m\left[1 + \frac{R^2}{\gamma^2}\right]\dot{z}^2 - mgz$.

C'est conforme à l'expression attendue, avec $\boxed{A = m\left[1 + \frac{R^2}{\gamma^2}\right]}$ et $\boxed{B = mg}$.

3. En l'absence de frottement l'enfant est soumis à son poids $\vec{P}$ (force conservative) et à la réaction normale $\vec{N}$ du toboggan, qui ne travaille pas car elle est orthogonale au déplacement. On en déduit que l'énergie mécanique est constante. On traduit en équation la conservation de l'énergie mécanique entre le point A ($z = 0$, $v = 0$) et le point B ($z = 3h$, $v = v_s$) :

$$E_m = 0 = \frac{1}{2}mv_s^2 - 3mgh \iff \boxed{v_s = \sqrt{6gh}}$$

4. On applique le théorème de la puissance mécanique à l'enfant dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0 = A\dot{z}\ddot{z} - B\dot{z} = A\dot{z}\left(\ddot{z} - \frac{B}{A}\right)$.

L'enfant est en mouvement donc $\dot{z} \neq 0$. On en déduit l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$: $\boxed{\ddot{z} = \frac{B}{A}}$.

On intègre deux fois successivement avec les conditions initiales $\dot{z}(0) = 0$ et $z(0) = 0$ (on choisit $t = 0$ pour le début de la glissade), on obtient : $\boxed{z(t) = \frac{B}{2A}t^2}$.

La durée de la descente s'identifie à la date à laquelle $z = 3h$: $z(T) = 3h \iff \boxed{T = \sqrt{\frac{6Ah}{B}}}$.

5. La force de frottement est à tout instant colinéaire et de sens contraire au vecteur vitesse $\vec{v}$ donc la puissance de cette force vaut $\mathscr{P}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{v} = -Fv$. Le travail de la force de frottement, entre A et B, vaut :

$$W(\vec{F}) = \int_0^T \mathscr{P}(\vec{F})\mathrm{d}t = -F\int_0^T v\mathrm{d}t$$

D'après les calculs de la question 2 : $v = \dot{z}\sqrt{1 + \frac{R^2}{\gamma^2}}$. On en déduit que :

$$W(\vec{F}) = -F\sqrt{1 + \frac{R^2}{\gamma^2}}\int_0^T \dot{z}\mathrm{d}t = -F\sqrt{1 + \frac{R^2}{\gamma^2}}\int_0^{3h}\mathrm{d}z = -3Fh\sqrt{1 + \frac{R^2}{\gamma^2}}$$

Comme cette force de frottement est la seule force non conservative qui travaille au cours de la descente, on en déduit que l'énergie perdue par l'enfant au cours de la descente vaut :

$$\mathscr{E}_{\text{perdue}} = -W(\vec{F}) = 3Fh\sqrt{1 + \frac{R^2}{\gamma^2}} \iff \boxed{\mathscr{E}_{\text{perdue}} = 6\pi F\sqrt{\gamma^2 + R^2}}$$