Corrigé DM12

Exercice : Mouvement dans des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ croisés

1. La particule est soumise à la force électromagnétique résultante $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. On applique le principe fondamental de la dynamique à la particule dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. On projette le PFD dans la base cartésienne :

$$\left| \begin{array}{l} m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} 0 \\ qE \\ 0 \end{array} \right. + \left| \begin{array}{c} qBv_y \\ -qBv_x \\ 0 \end{array} \right. \iff \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{qB}{m}v_y & (E_x) \\ \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{qB}{m}v_x + \dfrac{qE}{m} & (E_y) \\ \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = 0 & (E_z) \end{cases}$$

On intègre deux fois l'équation (E_z) avec les conditions initiales $\dot{z}(0) = 0$ et $z(0) = 0$: $\boxed{z(t) = 0}$.

2. On dérive l'équation (E_x) puis on utilise l'équation (E_y) :

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{qB}{m}\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x + \frac{q^2EB}{m^2} \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x = \frac{q^2EB}{m^2}}$$

De la même manière, en dérivant l'équation (E_y) on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_y}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{qB}{m}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 v_y}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y = 0}$$

$v_x(t)$ et $v_y(t)$ effectuent des oscillations harmoniques de pulsation propre : $\boxed{\omega_0 = \left|\dfrac{qB}{m}\right|}$.

3. Les solutions générales de ces deux équations sont : $v_x(t) = A_1\cos(\omega_0 t) + B_1\sin(\omega_0 t) + \dfrac{E}{B}$ et $v_y(t) = A_2\cos(\omega_0 t) + B_2\sin(\omega_0 t)$. On a trouvé la solution particulière de l'équation vérifiée par $v_x(t)$ en résolvant l'équation sans dérivée.

On détermine les conditions initiales : $v_x(0) = v_y(0) = 0$ (particule au repos à $t = 0$). Grâce à l'équation (E_x) on trouve $\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}(0) = \dfrac{qB}{m}v_y(0) = 0$ et grâce à l'équation (E_y) : $\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{qB}{m}v_x(0) + \dfrac{qE}{m} = \dfrac{qE}{m}$.

Avec ces conditions initiales on trouve : $\boxed{v_x(t) = \dfrac{E}{B}(1 - \cos(\omega_0 t))}$ et $\boxed{v_y(t) = \dfrac{E}{B}\sin(\omega_0 t)}$.

Ensuite on sait que $\langle\cos(\omega_0 t)\rangle = \langle\sin(\omega_0 t)\rangle = 0$ donc $\boxed{\langle v_x(t)\rangle = \dfrac{E}{B}}$ et $\boxed{\langle v_y(t)\rangle = 0}$. On en déduit qu'au cours du temps la particule dérive le long de l'axe (Ox) avec la vitesse : $\boxed{\vec{v}_D = \dfrac{E}{B}\vec{u}_x}$.

4. On a montré que $v_x(t) = v_D(1 - \cos(\omega_0 t))$. On intègre cette équation, avec la condition initiale $x(0) = 0$: $x(t) = v_D t - R\sin(\omega_0 t)$. On fait de même avec $v_y(t) = v_D\sin(\omega_0 t)$. On intègre avec la condition initiale $y(0) = 0$: $y(t) = R(1 - \cos(\omega_0 t))$.

Enfin, en remplaçant t par $\dfrac{\xi}{\omega_0} = \dfrac{R}{v_D}\xi$ on aboutit aux équations paramétriques suivantes :

$$\boxed{\begin{cases} x(\xi) = R(\xi - \sin\xi) \\ y(\xi) = R(1 - \cos\xi) \end{cases}}$$

Remarque : On représente ci-dessous l'allure de la trajectoire. Cette courbe porte le nom de **cycloïde**.