Devoir n°14 (non surveillé)

EXERCICE 1

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}$ puis étudier sa continuité et sa dérivabilité.

EXERCICE 2

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \ln|x|$ pour tout $x \neq 0$ est prolongeable par continuité en 0 et montrer que la fonction ainsi prolongée, qu'on notera toujours f, est de classe $\mathcal{C}^1$. Est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?

EXERCICE 3

1) Déterminer la dérivée d'ordre n de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x+a}$ où $a \in \mathbb{R}$.

2) En déduire sans nouveaux calculs la dérivée d'ordre n de la fonction ln.

EXERCICE 4 - Une équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$(*) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1) Montrer que $f(0) = 0$.

2) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}, f(nx) = nf(x)$.

3) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{Z}, f(nx) = nf(x)$.

4) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, r \in \mathbb{Q}, f(rx) = rf(x)$. On pourra poser $r = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ et considérer $f(px)$.

5) Montrer que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, f(xy) = xf(y)$. On pourra utiliser le fait que, pour tout réel x, il existe une suite (x_n) de rationnels qui tend vers x.

6) En déduire finalement qu'il existe un réel a tel que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = ax$.

7) Réciproquement, montrer que les fonctions de la forme $x \mapsto ax$, où $a \in \mathbb{R}$, vérifient $(*)$.