Chapitre 10

CALCUL MATRICIEL - SYSTÈMES LINÉAIRES

Dans tout le chapitre, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Calcul matriciel

1 Définitions

Une **matrice de type** (ou de **taille**) (n,p) **à coefficients dans** K est une famille $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ d'éléments de K (on écrira souvent a_{ij} au lieu de $a_{i,j}$). On la représente sous forme d'un tableau rectangulaire :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ l'ensemble des matrices de type (n,p) sur K. Deux matrices sont égales si elles ont les mêmes coefficients.

Une **matrice ligne** est une matrice de type $(1,p)$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \end{pmatrix}$.

Une **matrice colonne** est une matrice de type $(n,1)$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$.

La **matrice nulle** de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ est celle dont tous les coefficients sont nuls. On la note $0_{n,p}$ ou simplement 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Une **matrice carrée d'ordre** n **sur** K est une matrice de type (n,n) sur K : $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{M}_n(K)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n sur K (donc $\mathcal{M}_n(K) = \mathcal{M}_{n,n}(K)$).

La **diagonale de** $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est la famille $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$. La **trace de** A est la somme des coefficients de la diagonale. On la note $\operatorname{Tr} A$:

$$\operatorname{Tr} A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Une matrice carrée est **diagonale** (respectivement **triangulaire supérieure**, **triangulaire inférieure**) si elle est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

respectivement.

2 Addition et multiplication par un scalaire

On définit une addition + sur $\mathcal{M}_{n,p}(K)$: si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$, on pose :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}.$$

Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

On définit une multiplication par un scalaire . sur $\mathcal{M}_{n,p}(K)$: si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et que $\alpha \in K$, on pose :

$$\alpha.A = (\alpha a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}.$$

Par exemple, $3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & 15 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$.

Proposition 1

(i) L'addition est commutative : $\forall\, A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(K), A + B = B + A$.

(ii) L'addition est associative : $\forall\, A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(K), (A + B) + C = A + (B + C)$.

(iii) La matrice nulle 0 est élément neutre pour + : $\forall\, A \in \mathcal{M}_{n,p}(K), A + 0 = 0 + A = A$.

(iv) Toute matrice $A = (a_{ij})$ *admet pour opposé la matrice* $-A = (-a_{ij})$ *:* $A + (-A) = -A + A = 0$.

(v) Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ *et* $\alpha, \beta \in K$. *Alors :*

(a) $1.A = A$.

(b) $\alpha.(\beta.A) = (\alpha\beta).A$.

(c) $(\alpha + \beta).A = \alpha.A + \beta.A$.

(d) $\alpha.(A + B) = \alpha.A + \alpha.B$.

Démonstration : Vérifications immédiates. □

3 Produit matriciel

• Définition

Définition 1 *Soient* $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ *et* $B = (b_{jk})_{\substack{1\leqslant j\leqslant p \\ 1\leqslant k\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$. *La* **matrice produit des matrices** A **et** B *est la matrice* $A \times B = (c_{ik})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant k\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(K)$ *définie par :*

$$\forall\, i \in \{1, \dots, n\},\ \forall\, k \in \{1, \dots, q\},\ c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}.$$

On notera que pour pouvoir calculer $A \times B$, le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B, et que le produit d'une matrice de type (n, p) et d'une matrice de type (p, q) donne une matrice de type (n, q). Pour le calcul on pourra utiliser la disposition suivante :

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} & b_{1k} & \\ & b_{2k} & \\ & \vdots & \\ & b_{pk} & \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & \\ & c_{ik} & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{ip}b_{pk} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}.$$

Exemple : Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Alors $AB = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 & -9 \\ -4 & -4 & 11 & -9 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 & -9 \\ -4 & -4 & 11 & -9 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Remarques :

1) La j^e colonne de AB est le produit de A par la j^e colonne de B.

2) La i^e ligne de AB est le produit de la i^e ligne de A par B.

3) Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A. Plus précisément, si on note $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de A et que $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, alors $AX = x_1 C_1 + \ldots + x_p C_p$.

• Associativité

Proposition 2 *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(K)$. Alors :*

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C).$$

Démonstration : Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, $B = (b_{jk})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ 1 \leqslant k \leqslant q}}$ et $C = (c_{kl})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant q \\ 1 \leqslant l \leqslant r}}$.

Alors $AB = (d_{ik})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant q}}$ où $d_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}$ et $BC = (e_{jl})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ 1 \leqslant l \leqslant r}}$ où $e_{jl} = \sum_{k=1}^{q} b_{jk} c_{kl}$.

Ainsi $(A \times B) \times C = (f_{il})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant l \leqslant r}}$ où $f_{il} = \sum_{k=1}^{q} d_{ik} c_{kl}$ et $A \times (B \times C) = (g_{il})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant l \leqslant r}}$ où $g_{il} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} e_{jl}$.

Alors, pour tous i, l, $f_{il} = \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} = \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right)$ et $g_{il} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{q} b_{jk} c_{kl} \right) = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{q} a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right)$.
En intervertissant les signes sommes, on obtient le résultat voulu. □

• Bilinéarité

Proposition 3 *Le produit matriciel est bilinéaire :*

$$\begin{gathered}
(A_1 + A_2) \times B = A_1 \times B + A_2 \times B \\
(\alpha A) \times B = \alpha (A \times B) \\
A \times (B_1 + B_2) = A \times B_1 + A \times B_2 \\
A \times (\alpha B) = \alpha (A \times B)
\end{gathered}$$

Démonstration : Faire les calculs. □

• Élément neutre

Définition 2 *On appelle* **matrice identité d'ordre** n *et on note* I_n *la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K)$.

On définit le **symbole de Kronecker** ou **delta de Kronecker** par $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon. Alors $I_n = (\delta_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Proposition 4 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. Alors :*

$$A \times I_p = I_n \times A = A.$$

Démonstration : $A \times I_p = (c_{ik})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant p}}$ où $c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} \delta_{jk} = a_{ik}$ et $I_n \times A = (d_{ik})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant p}}$ où $d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} a_{jk} = a_{ik}$. □

Définition 3 *On appelle* **matrice scalaire** *une matrice de la forme λI_n où $\lambda \in K$.*

• Le produit matriciel n'est pas commutatif

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ deux matrices. A-t-on $AB = BA$?

– Si $n \neq q$ alors on ne peut pas calculer BA.

– Si $n = q$ mais que $n \neq p$, alors $AB \in \mathcal{M}_n(K)$ alors que $BA \in \mathcal{M}_p(K)$: on ne peut donc pas avoir $AB = BA$.

– Si $n = p = q$, alors AB et BA sont de même type, mais elles ne sont pas forcément égales. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et que $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, alors $AB = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 26 & 31 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 10 & 19 \\ 14 & 27 \end{pmatrix}$.

• Le produit matriciel n'est pas intègre

L'égalité $AB = 0$ n'implique pas que $A = 0$ ou $B = 0$. Par exemple, si $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $AB = 0$.

• Produit de deux matrices diagonales ou triangulaires

Proposition 5 *Le produit de deux matrices diagonales (resp. triangulaires supérieures, resp. triangulaires inférieures) est une matrice diagonale (resp. triangulaire supérieure, resp. triangulaire inférieure).*

Démonstration :

Soient $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ deux matrices carrées. Alors $AB = (c_{ik})_{1 \leqslant i,k \leqslant n}$ où $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$.

Supposons que A et B sont diagonales, i.e. que $a_{ij} = b_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Alors, si $i \neq k$, on a $c_{ik} = 0$ car, pour tout j, on a $a_{ij} = 0$ ou $b_{jk} = 0$, d'où $a_{ij} b_{jk} = 0$. La matrice AB est donc diagonale (noter que si $i = k$, $c_{ii} = a_{ii} b_{ii}$).

Supposons maintenant que A et B sont triangulaires supérieures, i.e. que $a_{ij} = b_{ij} = 0$ si $i > j$. Alors, si $i > k$, on a $c_{ik} = 0$ car, pour tout j, on a $i < j$ ou $j < k$, donc $a_{ij} = 0$ ou $b_{jk} = 0$, d'où $a_{ij} b_{jk} = 0$. La matrice AB est donc triangulaire supérieure (si $i = k$, on a aussi $c_{ii} = a_{ii} b_{ii}$). Le raisonnement est analogue pour les matrices triangulaires inférieures. □

Remarque : On voit que, dans les trois cas, les termes diagonaux du produit sont les produits des termes diagonaux des matrices de départ.

• Puissances d'une matrice carrée

Définition 4 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On définit par récurrence les puissances successives de A par $A^0 = I$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^{n+1} = A^n \times A$.*

Remarques :

1) Le produit matriciel n'étant pas commutatif, $(AB)^n$ et $A^n B^n$ ne sont pas toujours égales.

2) De même, pour calculer $(A + B)^n$, on peut utiliser la formule du binôme de Newton *à condition que les matrices A et B commutent.*

Exercice 1 Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ dans chacun des cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4 Matrices inversibles

Définition 5 *$A \in \mathcal{M}_n(K)$ est* **inversible** *s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que :*

$$\begin{cases} A \times B = I_n \\ B \times A = I_n \end{cases}.$$

On dit alors que B est la **matrice inverse de** *A et on la note A^{-1}.*

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(K)$ est appelé **groupe linéaire d'ordre n sur K** et noté $GL_n(K)$.

Remarques :

1) Si B existe, elle est unique. En effet, si $AB = BA = I$ et que $AC = CA = I$, alors $BAC = IC = C$ et $BAC = BI = B$ donc $B = C$.

2) On n'écrira jamais $\dfrac{1}{A}$ à la place de A^{-1}.

3) Si A est inversible, alors A^{-1} aussi, et $(A^{-1})^{-1} = A$.

4) La matrice identité I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$ car $I_n \times I_n = I_n$.

5) La matrice nulle n'est pas inversible puisque $0 \times B = B \times 0 = 0$ pour toute matrice B. Plus généralement, si l'une des lignes (resp. l'une des colonnes) de A est nulle, alors A n'est pas inversible. En effet, dans ce cas, pour toute matrice B, la ligne (resp. la colonne) correspondante de AB (resp. de BA) est nulle aussi donc on ne peut pas avoir $AB = I_n$ (resp. $BA = I_n$).

6) Si les matrices A et B sont inversibles, alors AB aussi, et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. En effet, $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$, et de même $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$.

Proposition 6 *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors $AB = I_n$ si et seulement si $BA = I_n$.*

Pour montrer qu'une matrice A est inversible, il suffit donc de trouver B telle que $AB = I_n$ ou telle que $BA = I_n$. Ce résultat est admis pour l'instant.

5 Matrices élémentaires

Définition 6 *Soit $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$. La* **matrice élémentaire** *E_{ij} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i, j) qui vaut 1.*

Par exemple, si $n = 2$ et $p = 3$ on a $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 7 *Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de matrices élémentaires.*

On dit que la famille $(E_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est une **base** de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.

Démonstration :

Toute matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ peut s'écrire sous la forme $A = \sum_{i,j} a_{ij}E_{ij}$, et si $\sum_{i,j} \lambda_{ij}E_{ij} = \sum_{i,j} \mu_{ij}E_{ij}$ alors $\lambda_{ij} = \mu_{ij}$ pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$. □

Par exemple, toute matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_{2,3}(K)$ s'écrit de manière unique :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 8 *Soient $i \in \{1, \dots, n\}$, $j, k \in \{1, \dots, p\}$ et $l \in \{1, \dots, q\}$. On a*

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}.$$

Démonstration : (Faire un schéma)

Toutes les lignes de E_{ij} sont nulles sauf la i^e, donc il en est de même pour $E_{ij}E_{kl}$, et toutes les colonnes de E_{kl} sont nulles sauf la l^e, donc il en est de même pour $E_{ij}E_{kl}$.

Ainsi le seul coefficient éventuellement non nul de $E_{ij}E_{kl}$ est celui d'indice (i, l). Or ce coefficient est le produit de la i^e ligne de E_{ij} (qui contient un 1 en j^e position) et de la l^e colonne de E_{kl} (qui contient un 1 en k^e position). Il est donc égal à 1 si $j = k$ et nul sinon.

Ainsi $E_{ij}E_{kl} = E_{il}$ si $j = k$ et $E_{ij}E_{kl} = 0$ sinon. □

6 Transposée d'une matrice

Définition 7 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. La* **matrice transposée de** *A est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(K)$ dont les lignes sont les colonnes de A. On la note A^T ou ${}^tA$.*

Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, alors $A^T = (\alpha_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ où $\alpha_{ij} = a_{ji}$.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, alors $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Proposition 9 *Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $\alpha, \beta \in K$. Alors :*

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$
$$(\alpha A)^T = \alpha A^T$$

Démonstration : Immédiat. □

Proposition 10 *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$. Alors :*

$$(A \times B)^T = B^T \times A^T.$$

Démonstration :

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $B = (b_{jk})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ 1 \leqslant k \leqslant q}}$. Alors $AB = (c_{ik})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant q}}$ où $c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}$, et $(AB)^T = (\gamma_{ik})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant q \\ 1 \leqslant k \leqslant n}}$ où $\gamma_{ik} = c_{ki} = \sum_{j=1}^{p} a_{kj} b_{ji}$.

D'autre part $A^T = (\alpha_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ où $\alpha_{ij} = a_{ji}$ et $B^T = (\beta_{jk})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant q \\ 1 \leqslant k \leqslant p}}$ où $\beta_{jk} = b_{kj}$, donc $B^T \times A^T = (\delta_{ik})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant q \\ 1 \leqslant k \leqslant n}}$ avec $\delta_{ik} = \sum_{j=1}^{p} \beta_{ij} \alpha_{jk} = \sum_{j=1}^{p} b_{ji} a_{kj} = \gamma_{ik}$. On a donc $(A \times B)^T = B^T \times A^T$. □

Proposition 11 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Si A est inversible, alors A^T aussi, et :*

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$$

Démonstration : $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$, donc $(A \times A^{-1})^T = (A^{-1} \times A)^T = I^T$, soit $(A^{-1})^T \times A^T = A^T \times (A^{-1})^T = I$. □

7 Matrices symétriques et antisymétriques

Définition 8 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On dit que A est* **symétrique** *si $A^T = A$. On dit que A est* **antisymétrique** *si $A^T = -A$.*

On notera $\mathcal{S}_n(K)$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(K)$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ est symétrique, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Remarques :

1) $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est symétrique si et seulement si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Elle est antisymétrique si et seulement si $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

2) Une matrice antisymétrique n'a que des 0 sur sa diagonale (car $a_{ii} = -a_{ii}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$).

Proposition 12 *Toute matrice carrée se décompose de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.*

Démonstration :

On raisonne par analyse-synthèse. Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$.

Analyse : Supposons que $M = S + A$ où S est symétrique et A antisymétrique. Alors $M^T = S^T + A^T = S - A$, donc en additionnant et soustrayant on obtient $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$.

Synthèse : Soient $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$. Alors $S^T = \frac{1}{2}(M^T + M) = S$, donc S est symétrique, et $A^T = \frac{1}{2}(M^T - M) = -A$, donc A est antisymétrique. De plus on a immédiatement $S + A = M$. □

Exemple : Pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, on obtient $S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

II Systèmes linéaires

1 Définitions

Définition 9 *Un* **système linéaire de** n **équations à** p **inconnues à coefficients dans** K *est un système d'équations de la forme :*

$$(\Sigma) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{array} \right.$$

où les a_{ij} et les b_i sont des éléments de K donnés et les x_j sont les inconnues.

Une **solution** *de (Σ) est un p-uplet $(x_1, \ldots, x_p) \in K^p$ pour lequel toutes les égalités sont vraies. On dit que le système est* **compatible** *s'il a au moins une solution, sinon on dit qu'il est* **incompatible***.*

On dit que le système est **homogène** *ou* **sans second membre** *si $b_1 = \ldots = b_n = 0$.*

Posons $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$. En calculant AX on voit que :

$$(x_1, \dots, x_p) \text{ solution de } (\Sigma) \Leftrightarrow AX = B.$$

On dit que A est la **matrice de** (Σ).

Proposition 13 *Soit* (Σ) *un système linéaire. Soit* (Σ_0) *le système homogène associé. Si* (Σ) *possède une solution, alors on obtient toutes les solutions de* (Σ) *en additionnant à cette solution les solutions de* (Σ_0).

Sous forme matricielle : si le système $AX = B$ est compatible, alors ses solutions sont les $X_0 + Y$, où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.

Solution générale de (Σ) = solution particulière de (Σ) + solution générale de (Σ_0)

Démonstration :

On considère le système sous forme matricielle $AX = B$ avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$. Soit $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(K)$ telle que $AX_0 = B$. Alors, pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(K)$, on a :

$$AX = B \Leftrightarrow AX = AX_0 \Leftrightarrow A(X - X_0) = 0 \Leftrightarrow X - X_0 \text{ solution de } (\Sigma_0).$$

Par conséquent, X est solution de (Σ) si et seulement s'il existe une solution Y de (Σ_0) telle que $X = X_0 + Y$. $\square$

Remarques :

1) Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B est combinaison linéaire des colonnes de A.

2) Un système homogène est toujours compatible puisque $(0, \dots, 0)$ est solution.

2 Opérations élémentaires

Définition 10 *Les* **opérations élémentaires sur les lignes** *d'un système linéaire ou d'une matrice sont :*

(i) l'échange de deux lignes L_i *et* L_j *(noté* $L_i \leftrightarrow L_j$*),*

(ii) la multiplication d'une ligne L_i *par un scalaire* non nul λ *(notée* $L_i \leftarrow \lambda L_i$*),*

(iii) l'ajout à une ligne L_i *du produit d'une autre ligne* L_j *(avec* $j \neq i$*) par un scalaire* λ *(noté* $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$*).*

Proposition 14 *Si on applique une de ces opérations à un système, l'ensemble de ses solutions ne change pas.*

Démonstration :

Il suffit de voir que toutes ces opérations sont réversibles : si on a échangé deux lignes d'un système, il suffit de les échanger à nouveau pour revenir au système initial. Si on a multiplié une ligne par $\lambda \neq 0$, il suffit de la multiplier par $1/\lambda$. Si on a ajouté λL_j à la ligne L_i, il suffit de lui retrancher λL_j. $\square$

Définition 11 *Les* **matrices de transposition** *(resp.* **de dilatation***, resp.* **de transvection***) sont les matrices de formes respectives :*

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad D_{i,\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad T_{i,j,\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & \lambda & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

où $i \neq j$ *et* $\lambda \neq 0$ *dans* $D_{i,\lambda}$.

On obtient la matrice T_{ij} en échangeant les i^e et j^e lignes de la matrice identité I_n, on obtient la matrice $D_{i,\lambda}$ en remplaçant le 1 de la i^e ligne de I_n par λ, et on obtient la matrice $T_{i,j,\lambda}$ à partir de I_n en remplaçant le 0 situé à l'intersection de la i^e ligne et de la j^e colonne par λ.

Proposition 15 *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$.

(i) Échanger les lignes L_i *et* L_j *de* A *revient à la multiplier à gauche par* T_{ij}.

(ii) Multiplier la ligne L_i *de* A *par* λ *revient à la multiplier à gauche par* $D_{i,\lambda}$.

(iii) Ajouter à la ligne L_i *de* A *le produit de la ligne* L_j *par* λ *revient à la multiplier à gauche par* $T_{i,j,\lambda}$.

Démonstration :
Soit $A = (a_{lm})_{\substack{1\leqslant l\leqslant n\\ 1\leqslant m\leqslant p}}$.
(i) Soient $i,j \in \{1,\dots,n\}$ avec $i \neq j$. On a $T_{ij} = (t_{kl})_{1\leqslant k,l\leqslant n}$ où $t_{kk} = 1$ si $k \neq i,j$, $t_{ij} = t_{ji} = 1$ et $t_{kl} = 0$ sinon.

Alors $T_{ij}A = (b_{km})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant m\leqslant p}}$ avec $b_{km} = \sum_{l=1}^{n} t_{kl}a_{lm}$. Si $k = i$, le seul terme non nul de cette somme est $t_{ij}a_{jm} = a_{jm}$. De même, si $k = j$, le seul terme non nul est $t_{ji}a_{im} = a_{im}$. Sinon, le seul terme non nul est $t_{kk}a_{km} = a_{km}$. Le résultat s'ensuit.

(ii) Soient $i \in \{1,\dots,n\}$ et $\lambda \in K$. On a $D_{i,\lambda} = (d_{kl})_{1\leqslant k,l\leqslant n}$ où $d_{kk} = 1$ si $k \neq i,j$, $d_{ii} = \lambda$ et $d_{kl} = 0$ sinon.

Alors $D_{i,\lambda}A = (b_{km})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant m\leqslant p}}$ avec $b_{km} = \sum_{l=1}^{n} d_{kl}a_{lm}$. Si $k = i$, le seul terme non nul de cette somme est $d_{ii}a_{im} = \lambda a_{im}$. Sinon, le seul terme non nul est $d_{kk}a_{km} = a_{km}$.

(iii) Soient $i,j \in \{1,\dots,n\}$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in K$. On a $T_{i,j,\lambda} = (t_{kl})_{1\leqslant k,l\leqslant n}$ où $t_{kk} = 1$ pour tout k, $t_{ij} = \lambda$ et $t_{kl} = 0$ sinon.

Alors $T_{i,j,\lambda}A = (b_{km})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant m\leqslant p}}$ avec $b_{km} = \sum_{l=1}^{n} t_{kl}a_{lm}$. Si $k = i$, la somme devient $t_{ii}a_{im} + t_{ij}a_{jm} = a_{im} + \lambda a_{jm}$. Sinon, le seul terme non nul est $t_{kk}a_{km} = a_{km}$. □

Corollaire 16 *Les matrices T_{ij}, $D_{i,\lambda}$ (avec $\lambda \neq 0$) et $T_{i,j,\lambda}$ sont inversibles et leurs inverses sont respectivement T_{ij}, $D_{i,1/\lambda}$ et $T_{i,j,-\lambda}$.*

Démonstration : D'après la proposition précedente on a $T_{ij}^2 = I$, $D_{i,\lambda}D_{i,1/\lambda} = D_{i,1/\lambda}D_{i,\lambda} = I$ et $T_{i,j,\lambda}T_{i,j,-\lambda} = T_{i,j,-\lambda}T_{i,j,\lambda} = I$. □

Remarque : On peut définir les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice : échange de deux colonnes, multiplication par un scalaire non nul, ajout à une colonne d'un multiple d'une autre colonne. On a alors des résultats analogues à ceux concernant les lignes : les opérations $C_i \leftrightarrow C_j$, $C_i \leftarrow \lambda C_i$ et $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ se traduisent matriciellement par la multiplication *à droite* par T_{ij}, $D_{i,\lambda}$ et $T_{j,i,\lambda}$ respectivement.

3 Méthode pratique de résolution

La méthode générale pour résoudre un système linéaire est la **méthode du pivot de Gauss** (inutile d'apprendre par cœur l'algorithme suivant, il faut simplement savoir l'appliquer en pratique).

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ la matrice du système.

1. On pose $l = 1$.

2. Pour k allant de 1 à $n-1$:

– On commence par chercher le pivot. Soit $A' = (a_{ij})_{\substack{k\leqslant i\leqslant n\\ l\leqslant j\leqslant p}}$. Si A' est nulle, on arrête l'algorithme. Sinon, soit C_j la première colonne non nulle de A'. On choisit dans C_j un élément non nul a_{ij} qui sera le pivot. On échange si nécessaire les lignes L_k et L_i du système afin que le pivot soit en position (k,j).

– On élimine les coefficients situés sous le pivot, en appliquant au système l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{a_{ij}}{a_{kj}} L_k$, pour i compris entre $k+1$ et n.

– On pose $l = j + 1$.

On obtient ainsi un système **échelonné**, i.e. tel que :

– si le premier membre d'une ligne est nul, les premiers membres des lignes suivantes le sont aussi,

– à partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche (le **pivot**) est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.

Par exemple, le système (Σ) : $\left\{\begin{array}{r} \mathbf{2}x - 5y - 3z + 7t = 2 \\ \mathbf{4}z - 3t = -7 \\ \mathbf{2}t = 1 \end{array}\right.$ est échelonné. Les pivots sont en gras.

Les **inconnues principales** d'un système linéaire échelonné sont celles dont un des coefficients est un pivot. Les inconnues non principales sont appelées **inconnues secondaires** ou **paramètres**.

Dans l'exemple ci-dessus, les inconnues principales sont x, z et t, alors que y est une inconnue secondaire.

La résolution d'un système linéaire échelonné est très simple. Le système est compatible si et seulement si, pour toutes les équations dont le premier membre est nul, le second membre est nul également. Ensuite, la résolution se fait en exprimant les inconnues principales en fonctions des inconnues secondaires, en commençant par la dernière équation non nulle et en remontant dans les équations précédentes.

Exemple : Le système (Σ) ci-dessus est compatible et on a :

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x-5y-3z+7t=2 \\ 4z-3t=-7 \\ t=1/2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x-5y-3z+7t=2 \\ z=-11/8 \\ t=1/2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-45/16+(5/2)y \\ z=-11/8 \\ t=1/2 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions de (Σ) est donc $\{(-45/16+(5/2)y, y, -11/8, 1/2) \,|\, y \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 2 Résoudre les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+5y=3 \\ 4x-3y=1 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{l} 2x+y+z=3 \\ x-y-z=1 \\ 3x-y+2z=4 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{l} x-4y-z=3 \\ 2x-y-z=1 \\ 3x+2y-z=5 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{l} x-4y-z=3 \\ 2x-y-z=1 \\ 3x+2y-z=-1 \end{array}\right.$$

4 Application : calcul de l'inverse d'une matrice

• Calcul de A^{-1} par résolution du système $AX=Y$

Proposition 17 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) A est inversible.

(ii) Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$, le système $AX=Y$ a une solution unique.

(iii) Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$, le système $AX=Y$ a au moins une solution.

Démonstration :

$(i) \Rightarrow (ii)$: Si A est inversible, alors, pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$, on a : $AX=Y \Leftrightarrow X=A^{-1}Y$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Immédiat.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Supposons que, pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$, le système $AX=Y$ a au moins une solution. Considérons, pour $i \in \{1,\dots,n\}$, la matrice $Y_i \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ ayant un 1 dans la i^e ligne et des 0 ailleurs. Soit X_i une solution du système $AX=Y_i$. Alors la matrice $B \in \mathcal{M}_n(K)$ dont les colonnes sont $X_1,\dots,X_n$ vérifie $AB=I_n$ (cf remarque 1 après la définition du produit matriciel). D'après la proposition 6, on en déduit que A est inversible. □

Ainsi, pour montrer qu'une matrice carrée A est inversible et déterminer A^{-1}, il suffit de résoudre le système linéaire $AX=Y$ (où $X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T$ et $Y=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}^T$) : si, pour tout Y, ce système admet une solution (qui est donc unique), alors A est inversible et l'équivalence $AX=Y \Leftrightarrow X=A^{-1}Y$ permet d'obtenir A^{-1}.

Exemple : Soit $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$. Soient $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Alors :

$$AX=Y \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x_1-x_2=y_1 \\ 5x_1-2x_2=y_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2=3x_1-y_1 \\ -x_1+2y_1=y_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2=5y_1-3y_2 \\ x_1=2y_1-y_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=2y_1-y_2 \\ x_2=5y_1-3y_2 \end{array}\right. .$$

Le système admet une solution unique, donc la matrice A est inversible. De plus le dernier système correspond à l'égalité $X=A^{-1}Y$, donc $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. On peut vérifier que l'on a bien $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Exercice 3 Les matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -3 & 5 & 2 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leurs inverses.

• Calcul de A^{-1} par la méthode du pivot

Proposition 18 *Soient A et M deux matrices carrées. On suppose que A est inversible. Alors :*

$$M \textit{ inversible} \Leftrightarrow AM \textit{ inversible} \Leftrightarrow MA \textit{ inversible.}$$

Démonstration :

On a vu que le produit de deux matrices inversibles est inversible, donc si M est inversible alors AM et MA aussi. Réciproquement, si AM est inversible, alors $M=A^{-1}(AM)$ aussi, et si MA est inversible, alors $M=(MA)A^{-1}$ aussi. □

Proposition 19 *Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice ne modifient pas son inversibilité.*

Démonstration :

On a vu qu'appliquer une telle opération élémentaire à une matrice revient à la multiplier à gauche ou à droite par une matrice de transposition, de dilatation ou de transvection. Or ces matrices sont inversibles. La proposition précédente permet de conclure. □

Proposition 20 *$A \in \mathcal{M}_n(K)$ est inversible si et seulement si on peut la transformer en I_n par une succession d'opérations élémentaires.*

Démonstration :

On admet le sens direct qui est une conséquence de l'algorithme du pivot de Gauss. Le sens réciproque est une conséquence immédiate de la proposition précédente. □

Ainsi, pour déterminer si une matrice A est inversible ou non, on peut lui appliquer des opérations élémentaires sur les lignes jusqu'à ce qu'on obtienne soit I_n, soit une matrice clairement non inversible. De plus, si $I_n = E_r \dots E_1 A$ où les E_i sont des matrices de transposition, de dilatation ou de transvection, alors $A^{-1} = E_r \dots E_1 I_n$: pour obtenir A^{-1} il suffit d'appliquer à la matrice I_n les mêmes opérations élémentaires que celles utilisées pour passer de A à I_n.

Exemple : Reprenons la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$. Alors :

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow (1/3)L_1 \quad & \sim_L \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\
& \sim_L \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & -5/3 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow -3L_2 \\
& \sim_L \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + (1/3)L_2 \\
& \sim_L \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

On conclut que A est inversible et que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 Appliquer cette méthode aux matrices de l'exercice précédent.