Fiche d'exercices : Calcul matriciel - Systèmes linéaires

Exercice 1 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1) Quelles que soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$.
2) Si A et B sont deux matrices carrées telles que $AB = 0$, alors $BA = 0$.
3) Si B commute avec A, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B commute avec A^n.
4) Si $AB = AC$, alors $B = C$.
5) Si $AB = AC$ et que A est inversible, alors $B = C$.
6) Si A et B sont inversibles, alors $A + B$ aussi.
7) Si A est inversible et que $\alpha \in K^*$, alors αA est inversible.
8) Si A est inversible, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est inversible et $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.
9) Si A est inversible et symétrique, alors A^{-1} est symétrique.
10) Si A et B sont symétriques, alors AB est symétrique.

Exercice 2 Expliciter la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 4} \in \mathcal{M}_4(K)$ dans les cas suivants :

$$a_{ij} = \frac{i}{j} \ ; \ a_{ij} = (-1)^{i+j} \ ; \ a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } j = i \\ 1 \text{ si } j > i \\ -1 \text{ si } j < i \end{cases} \ ; \ a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = 5 - i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Exercice 3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec A.

Exercice 4 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices B telles que $BA = I_2$.

Exercice 5

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $(A - I)^2$ et en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \end{cases}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n \\ v_{n+1} = 4u_n - v_n \end{cases}$. Déterminer les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 6 Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ ; \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 Une matrice carrée réelle est stochastique si tous ses coefficients sont compris entre 0 et 1 et que la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.

Exercice 8 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$. Calculer A^4 et en déduire A^{-1}.

Exercice 9 Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $aM^2 + bM + cI = 0$ avec $c \neq 0$. Montrer que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de M.

Exercice 10 Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(K)$. Trouver $\alpha, \beta \in K$ tels que $M^2 = \alpha M + \beta I_2$. En déduire que M est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et calculer alors M^{-1}.

Exercice 11

1) Montrer que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(K), \forall \alpha, \beta \in K, \mathrm{Tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \,\mathrm{Tr}\, A + \beta \,\mathrm{Tr}\, B$.
2) Montrer que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(K), \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
3) Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}(AA^T) \geqslant 0$. Quand y a-t-il égalité ?

Exercice 12

1) Calculer AA^T et A^TA pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, les matrices AA^T et A^TA sont symétriques.
3) Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $(AA^T = 0 \Leftrightarrow A^TA = 0 \Leftrightarrow A = 0)$. Est-ce toujours vrai si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$?

Exercice 13 Soit A une matrice carrée telle que $A^n = 0$ (où $n \in \mathbb{N}^*$). Montrer que $I - A$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 14 Dans les cas suivants, déterminer les matrices $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $X^2 = A$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \ ; \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Indication : on pourra commencer par chercher le commutant de A.

Exercice 15 Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(K)$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(K)$?

Exercice 16 Résoudre les systèmes suivants (d'inconnues x, y) :

$$\begin{cases} x + ay = a \\ ax + y = -a \end{cases} \ ; \ \begin{cases} ax + by = 1 \\ ax - by = -1 \end{cases} \ ; \ \begin{cases} ax + by = 1 \\ bx + ay = 1 \end{cases}$$

Exercice 17 Résoudre les systèmes suivants (d'inconnues x, y, z) :

$$\begin{cases} x+y+mz=m \\ x+my-z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} ax+(1-a)y+(1-a)z=a^2 \\ ax+(1+a)y+(1+a)z=a-a^2 \\ x+y+z=1-a \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases}$$

Exercice 18 Résoudre les systèmes suivants (d'inconnues x, y, z, t) :

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+z=2 \\ 3x+2y+z-t=4 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x+y=a \\ y+z=b \\ z+t=c \\ t+x=d \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x+y+z+t=3 \\ x+my+z-mt=m+2 \\ mx-y-mz-t=-1 \end{cases}$$

Exercice 19 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ pair et $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre le système $\begin{cases} x_1+\lambda x_n=1 \\ x_2+\lambda x_{n-1}=1 \\ \vdots \\ x_{n-1}+\lambda x_2=1 \\ x_n+\lambda x_1=1 \end{cases}$.

Exercice 20 Inverser, si possible, les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 2+i & 1-2i \\ 2-3i & -1-i \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 21 Inverser, si possible, les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} a+1 & a & a \\ b & b+1 & b \\ c & c & c+1 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & b & a \\ b & a & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 22 Inverser, si possible, les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & a_2 & 0 \\ 0 & \iddots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 23 Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

2) Calculer $D = P^{-1}AP$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer D^n et en déduire A^n.

4) Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.