Corrigé DM13

Exercice : Oscillations amorties mécaniques

1. Dans la deuxième phase du mouvement, l'altitude de C est constante : $z_C = H$. On étudie l'équilibre mécanique de l'habitacle : $\left(\dfrac{\mathrm{d}z_G}{\mathrm{d}t} = 0\right)$. Il est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la force exercée par la suspension : $\vec{F} = -k(z_{\text{eq}} - H - \ell_0)\vec{u}_z$. On applique le PFD à l'équilibre : $\vec{0} = \vec{P} + \vec{F}$. On projette sur $\vec{u}_z$:

$$-Mg - k\left(z_{\text{eq}} - H - \ell_0\right) = 0 \iff \boxed{z_{\text{eq}} = H + \ell_0 - \frac{Mg}{k}}$$

2. On applique maintenant le PFD à l'habitacle en mouvement ($\dfrac{\mathrm{d}z_C}{\mathrm{d}t}$ reste nul car l'altitude z_C est constante) : $M\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}$ avec $\vec{F} = -k(z_G - H - \ell_0)\vec{u}_z - \alpha\dot{z}_G\vec{u}_z$. On projette sur $\vec{u}_z$:

$$M\ddot{z}_G = -Mg - k\left(z_G - H - \ell_0\right) - \alpha\dot{z}_G \iff \boxed{\ddot{z}_G + \frac{\alpha}{M}\dot{z}_G + \frac{k}{M}z_G = -g + \frac{k}{M}(H + \ell_0)}$$

3. On pose le changement de variable $z_G = Z + H + \ell_0 - \dfrac{Mg}{k}$. En dérivant on a $\dot{z}_G = \dot{Z}$ et $\ddot{z}_G = \ddot{Z}$. En remplaçant dans l'équation de la question 2 on trouve :

$$\boxed{\ddot{Z} + \frac{\alpha}{M}\dot{Z} + \frac{k}{M}Z = 0}$$

4. Le régime transitoire est le plus court lorsque l'on se trouve en **régime critique**. Par conséquent, il faire en sorte que $Q = \dfrac{1}{2}$. Ici on trouve par identification : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $Q = \dfrac{M\omega_0}{\alpha} = \dfrac{\sqrt{kM}}{\alpha}$.

On conclut que $Q = \dfrac{\sqrt{kM}}{\alpha} = \dfrac{1}{2} \iff \boxed{\alpha = 2\sqrt{kM}}$.

5. La masse totale du véhicule passe de M à $M+m$ mais on a toujours $\alpha = 2\sqrt{kM}$. Le facteur de qualité devient :

$$Q = \frac{\sqrt{k(M+m)}}{\alpha} = \frac{\sqrt{k(M+m)}}{2\sqrt{kM}} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{m}{M}} > \frac{1}{2}$$

Désormais, on se trouve en $\boxed{\text{régime pseudopériodique}}$. Les paramètres canoniques s'écrivent : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{M+m}}$ et $Q = \dfrac{1}{2}\sqrt{1 + \dfrac{m}{M}}$.

La pseudopulsation vaut : $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}} = \sqrt{\dfrac{k}{M+m} - \dfrac{kM}{(M+m)^2}} = \dfrac{\sqrt{km}}{M+m}$ et la pseudopériode :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi(M+m)}{\sqrt{km}}}$$

6. Pour avoir une pseudopériode égale à une seconde, on choisit la raideur k telle que :

$$\boxed{k = \frac{4\pi^2(M+m)^2}{Tm} = 2{,}2 \cdot 10^5\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\alpha = 2\sqrt{kM} = 3{,}0 \cdot 10^4\,\mathrm{kg \cdot s^{-1}}}\ ,\quad \boxed{Q = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{m}{M}} = 0{,}57}\quad \text{et}\quad \boxed{\tau \simeq \frac{10Q}{\omega_0} = \frac{5(M+m)}{\sqrt{kM}} = 0{,}44\,\mathrm{s}}$$

Corrigé DM13

Exercice : Oscillations amorties mécaniques

1. Dans la deuxième phase du mouvement, l'altitude de C est constante : $z_C = H$. On étudie l'équilibre mécanique de l'habitacle : $\left(\dfrac{\mathrm{d}z_G}{\mathrm{d}t} = 0\right)$. Il est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la force exercée par la suspension : $\vec{F} = -k(z_{\text{eq}} - H - \ell_0)\vec{u}_z$. On applique le PFD à l'équilibre : $\vec{0} = \vec{P} + \vec{F}$. On projette sur $\vec{u}_z$:

$$-Mg - k\left(z_{\text{eq}} - H - \ell_0\right) = 0 \iff \boxed{z_{\text{eq}} = H + \ell_0 - \frac{Mg}{k}}$$

2. On applique maintenant le PFD à l'habitacle en mouvement ($\dfrac{\mathrm{d}z_C}{\mathrm{d}t}$ reste nul car l'altitude z_C est constante) : $M\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}$ avec $\vec{F} = -k(z_G - H - \ell_0)\vec{u}_z - \alpha\dot{z}_G\vec{u}_z$. On projette sur $\vec{u}_z$:

$$M\ddot{z}_G = -Mg - k\left(z_G - H - \ell_0\right) - \alpha\dot{z}_G \iff \boxed{\ddot{z}_G + \frac{\alpha}{M}\dot{z}_G + \frac{k}{M}z_G = -g + \frac{k}{M}(H + \ell_0)}$$

3. On pose le changement de variable $z_G = Z + H + \ell_0 - \dfrac{Mg}{k}$. En dérivant on a $\dot{z}_G = \dot{Z}$ et $\ddot{z}_G = \ddot{Z}$. En remplaçant dans l'équation de la question 2 on trouve :

$$\boxed{\ddot{Z} + \frac{\alpha}{M}\dot{Z} + \frac{k}{M}Z = 0}$$

4. Le régime transitoire est le plus court lorsque l'on se trouve en **régime critique**. Par conséquent, il faire en sorte que $Q = \dfrac{1}{2}$. Ici on trouve par identification : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $Q = \dfrac{M\omega_0}{\alpha} = \dfrac{\sqrt{kM}}{\alpha}$.

On conclut que $Q = \dfrac{\sqrt{kM}}{\alpha} = \dfrac{1}{2} \iff \boxed{\alpha = 2\sqrt{kM}}$.

5. La masse totale du véhicule passe de M à $M+m$ mais on a toujours $\alpha = 2\sqrt{kM}$. Le facteur de qualité devient :

$$Q = \frac{\sqrt{k(M+m)}}{\alpha} = \frac{\sqrt{k(M+m)}}{2\sqrt{kM}} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{m}{M}} > \frac{1}{2}$$

Désormais, on se trouve en $\boxed{\text{régime pseudopériodique}}$. Les paramètres canoniques s'écrivent : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{M+m}}$ et $Q = \dfrac{1}{2}\sqrt{1 + \dfrac{m}{M}}$.

La pseudopulsation vaut : $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}} = \sqrt{\dfrac{k}{M+m} - \dfrac{kM}{(M+m)^2}} = \dfrac{\sqrt{km}}{M+m}$ et la pseudopériode :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi(M+m)}{\sqrt{km}}}$$

6. Pour avoir une pseudopériode égale à une seconde, on choisit la raideur k telle que :

$$\boxed{k = \frac{4\pi^2(M+m)^2}{Tm} = 2{,}2 \cdot 10^5\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\alpha = 2\sqrt{kM} = 3{,}0 \cdot 10^4\,\mathrm{kg \cdot s^{-1}}}\ ,\quad \boxed{Q = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{m}{M}} = 0{,}57}\quad \text{et}\quad \boxed{\tau \simeq \frac{10Q}{\omega_0} = \frac{5(M+m)}{\sqrt{kM}} = 0{,}44\,\mathrm{s}}$$