Correction du DNS 13

EXERCICE 1

1) $\binom{0}{0} = 1$ donc $u_0 = 1$, $\binom{2}{1} = 2$ donc $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $\binom{4}{2} = 6$ donc $u_2 = \dfrac{1}{6}$.

Par conséquent, $S_0 = u_0 = 1$, $S_1 = u_0 + u_1 = \dfrac{3}{2}$ et $S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = \dfrac{5}{3}$.

2) Pour tout n, $S_{n+1} - S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} > 0$ (les termes de la somme d'indice $k \in \{0, \dots, n\}$ s'éliminent).
La suite (S_n) est donc strictement croissante.

3) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\dbinom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$ et $\dbinom{2n+2}{n+1} = \dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}$ donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n+2}{n+1}} = \frac{(2n)!(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!n!n!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{(n+1)^2}{2(2n+1)(n+1)} = \frac{n+1}{4n+2}.$$

Or, pour tout n, $4n + 2 \geqslant 2(n+1)$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$ d'où $u_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n}{2}$.

b) Montrons par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

Au rang $n = 0$, on a $u_0 = 1 = \dfrac{1}{2^0}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. Alors $u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2} u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

Par le théorème de récurrence, on a donc bien $u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ pour tout entier naturel n.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$ d'après la question précédente. Or

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}}{1 - \dfrac{1}{2}} = \frac{1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}}{\dfrac{1}{2}} = 2 - \frac{2}{2^{n+1}} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

On a donc $S_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{2^n}$.

4) Pour tout n, $S_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{2^n} \leqslant 2$ donc la suite (S_n) est majorée par 2.
La suite (S_n) est croissante et majorée donc elle est convergente et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n \leqslant 2$ en passant à la limite dans l'inégalité précédente.

EXERCICE 2

1) On trouve :

$$u_1 = 1{,}5 \ ; \ v_1 \approx 1{,}73 \ ; \ u_2 \approx 1{,}62 \ ; \ v_2 \approx 1{,}67 \ ; \ u_3 \approx 1{,}64 \ ; \ v_3 \approx 1{,}66.$$

On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante, que la suite (v_n) est décroissante et que $v_n - u_n$ tend vers 0, autrement dit que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = u_{n+1}v_n - \frac{(u_n + v_n)^2}{4} = \frac{u_n v_n + v_n^2}{2} - \frac{u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2}{4} = \frac{v_n^2 - u_n^2}{4}.$$

b) Montrons par récurrence que $v_n^2 - u_n^2 = \dfrac{3}{4^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a $v_0^2 - u_0^2 = 3 = \dfrac{3}{4^0}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $v_n^2 - u_n^2 = \dfrac{3}{4^n}$. Alors

$$v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \frac{v_n^2 - u_n^2}{4} = \frac{3}{4^{n+1}}.$$

La récurrence est achevée.

c) Par récurrence immédiate on montre que les deux suites sont à valeurs positives.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_n^2 - u_n^2 = \dfrac{3}{4^n} \geqslant 0$, donc $v_n^2 \geqslant u_n^2$ et donc $v_n \geqslant u_n$ puisque u_n et v_n sont positifs.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \geqslant 0$$

donc la suite (u_n) est croissante, et

$$v_{n+1}^2 - v_n^2 = u_{n+1}v_n - v_n^2 = \frac{u_n v_n + v_n^2}{2} - v_n^2 = \frac{u_n v_n - v_n^2}{2} = \frac{v_n(u_n - v_n)}{2} \leqslant 0$$

donc $v_{n+1}^2 \leqslant v_n^2$ et donc $v_{n+1} \leqslant v_n$: la suite (v_n) est décroissante.

e) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$0 \leqslant v_n - u_n = \frac{v_n^2 - u_n^2}{v_n + u_n} = \frac{3}{4^n(u_n + v_n)} \leqslant \frac{3}{2.4^n}$$

car $u_n + v_n \geqslant 2u_n \geqslant 2u_0 = 2$. Par conséquent, d'après le théorème des gendarmes, $v_n - u_n$ tend vers 0.

De plus (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite.

f) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$. Il suffit de calculer les termes des deux suites jusqu'à ce que leur écart soit inférieur à 10^{-3}. On trouve que $u_5 \approx 1{,}6534$ et que $v_5 \approx 1{,}6543$ donc une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près est 1,654.

3) a) On raisonne par récurrence.

Pour $n = 1$: $p_1 = \cos\dfrac{\theta}{2}$ donc $p_1 \sin\dfrac{\theta}{2^1} = \cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sin\theta}{2}$ car $\sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$ (formule de duplication).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $p_n \sin\dfrac{\theta}{2^n} = \dfrac{\sin\theta}{2^n}$ et montrons que $p_{n+1}\sin\dfrac{\theta}{2^{n+1}} = \dfrac{\sin\theta}{2^{n+1}}$.

On a $p_{n+1}\sin\dfrac{\theta}{2^{n+1}} = p_n\cos\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\sin\dfrac{\theta}{2^{n+1}}$. Or $\sin\dfrac{\theta}{2^n} = 2\sin\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\cos\dfrac{\theta}{2^{n+1}}$ (formule de duplication) donc $p_{n+1}\sin\dfrac{\theta}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}p_n\sin\dfrac{\theta}{2^n} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin\theta}{2^n} = \dfrac{\sin\theta}{2^{n+1}}$.

Ainsi, d'après le théorème de récurrence, on a bien $p_n\sin\dfrac{\theta}{2^n} = \dfrac{\sin\theta}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Si $\theta = 0$ alors $p_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc p_n tend vers 1. Supposons $\theta \neq 0$. On peut écrire

$$2^n\sin\frac{\theta}{2^n} = \theta\frac{2^n}{\theta}\sin\frac{\theta}{2^n} = \theta\,\frac{\sin\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \theta$$

car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\theta}{2^n} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Si n est assez grand on a $\sin\dfrac{\theta}{2^n} \neq 0$ donc

$$p_n = \frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sin\theta}{\theta}.$$

4) a) On raisonne par récurrence.

Pour $n = 0$ on a $4\displaystyle\prod_{k=0}^{0}\cos\frac{\pi}{3.2^k} = 4\cos\frac{\pi}{3} = 2 = v_0$ et $v_0\cos\dfrac{\pi}{3.2^0} = 1 = u_0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $v_n = 4\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\cos\frac{\pi}{3.2^k}$ et $u_n = v_n\cos\dfrac{\pi}{3.2^n}$. Alors :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{v_n\cos\frac{\pi}{3.2^n} + v_n}{2} = \frac{v_n\left(1 + \cos\frac{\pi}{3.2^n}\right)}{2} = v_n\cos^2\frac{\pi}{3.2^{n+1}}$$

en utilisant la formule $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$, donc

$$v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} = \sqrt{v_n^2 \cos^2 \frac{\pi}{3.2^{n+1}}} = v_n \cos \frac{\pi}{3.2^{n+1}} = 4\prod_{k=0}^{n+1} \cos \frac{\pi}{3.2^k}.$$

On voit alors qu'on a aussi $u_{n+1} = v_{n+1} \cos \dfrac{\pi}{3.2^{n+1}}$.

D'après le théorème de récurrence on a donc bien $v_n = 4\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \cos \frac{\pi}{3.2^k}$ et $u_n = v_n \cos \dfrac{\pi}{3.2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) D'après 3)b) le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos \frac{\pi}{3.2^k}$ tend vers $\dfrac{\sin \frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

Par conséquent

$$v_n = 4\cos\frac{\pi}{3}\prod_{k=1}^{n} \cos \frac{\pi}{3.2^k} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{3\sqrt{3}}{\pi}.$$