Devoir n°15 (non surveillé)

EXERCICE 1

Soit f une fonction dérivable sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que, pour tout réel $b \notin [0,1]$, il existe une tangente à la courbe représentative de f qui passe par le point de coordonnées $(b,0)$.

Indication : appliquer le théorème de Rolle à une fonction bien choisie.

EXERCICE 2

Le but de l'exercice est de calculer les dérivées successives de la fonction Arcsin. On rappelle que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-1,1[$.

1) Calculer les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 de Arcsin (les calculs sont plus simples en utilisant des exposants négatifs).

2) Les calculs précédents conduisent à conjecturer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la dérivée n-ième de Arcsin peut se mettre sous la forme :

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ \mathrm{Arcsin}^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}},$$

où P_n est une fonction polynomiale.

a) Démontrer cette conjecture par récurrence. On montrera en particulier que l'expression de $P_{n+1}(x)$ en fonction de $P_n(x)$ et de $P_n'(x)$ est

$$P_{n+1}(x) = (1-x^2)P_n'(x) + (2n-1)xP_n(x).$$

b) Que valent $P_1(x)$, $P_2(x)$ et $P_3(x)$? En déduire $P_4(x)$ et $P_5(x)$.

c) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, le terme de plus haut degré de $P_n(x)$ est $(n-1)!x^{n-1}$.

3) a) Montrer que Arcsin est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' - xy' = 0.$$

b) Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Calculer les dérivées d'ordre n des fonctions $x \mapsto xy'(x)$ et $x \mapsto (1-x^2)y''(x)$ à l'aide de la formule de Leibniz.

c) En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, Arcsin est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} - n^2y^{(n)} = 0.$$

d) Montrer alors que, pour tout $n \geqslant 1$, on a : $P_{n+2}(x) = (2n+1)xP_{n+1}(x) + n^2(1-x^2)P_n(x)$.

4) a) Trouver une relation entre $P_{n+2}(0)$ et $P_n(0)$.

b) En déduire, pour tout entier naturel p, la valeur de $\mathrm{Arcsin}^{(2p)}(0)$, puis celle de $\mathrm{Arcsin}^{(2p+1)}(0)$ (on donnera le résultat avec des factorielles).