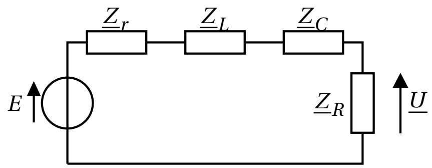
Corrigé DM14

Exercice : Oscillations forcées dans un circuit électrique



1. On étudie le circuit en RSF et on applique la méthode complexe.

L'amplitude complexe de la tension aux bornes de la résistance R vaut $\underline{U} = U_m e^{j\varphi}$.

On applique la loi du pont diviseur de tension :

$$\underline{U} = \frac{RE}{R+r+jL\omega+\frac{1}{jC\omega}} \iff U_m e^{j\varphi} = \frac{RE}{R+r+j\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)} \iff \boxed{\frac{RE}{U_m}e^{-j\varphi} = R+r+j\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)}$$

On trouve l'expression attendue avec $A = R+r$ et $B = L\omega - \frac{1}{C\omega}$.

2. On identifie la partie réelle et la partie imaginaire dans l'expression obtenue :

$$\begin{cases} \frac{RE}{U_m}\cos\varphi = R+r \\ -\frac{RE}{U_m}\sin\varphi = L\omega - \frac{1}{C\omega} \end{cases} \iff \boxed{r = R\left(\frac{E}{U_m}\cos\varphi - 1\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{L = \frac{1}{C\omega^2} - \frac{RE}{\omega U_m}\sin\varphi}$$

3. On lit sur le graphe $\boxed{E = 8\,\mathrm{V}}$ et $\boxed{U_m = 4\,\mathrm{V}}$. La période des signaux vaut $T = 1\,\mathrm{ms}$ donc $\boxed{f = 1\,\mathrm{kHz}}$. On note que φ correspond au déphasage entre les tensions $e(t)$ et $u(t)$: on mesure un décalage temporel d'un huitième de période, soit $\boxed{\varphi = \frac{\pi}{4}}$.

À partir de ces valeurs on trouve : $\boxed{L = 15\,\mathrm{mH}}$ et $\boxed{r = 8,3\,\Omega}$.

4. On reprend le calcul de la question 1 : $\underline{U} = \dfrac{RE}{R+r+jL\omega+\frac{1}{jC\omega}} = \dfrac{\frac{R}{R+r}E}{1+\frac{j}{R+r}\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)}$. On identifie :

$$\boxed{U_0 = \frac{R}{R+r}E} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{Q}{\omega_0} = \frac{L}{R+r} \\ Q\omega_0 = \frac{1}{(R+r)C} \end{cases} \iff \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{L\omega_0}{R+r} = \frac{1}{R+r}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

5. On passe au module : $U_m = \dfrac{U_0}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$.

Il y a résonance si le dénominateur est minimal, ce qui se produit lorsque la parenthèse s'annule. La résonance se produit à la pulsation ω_0 donc à la fréquence $\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1,14\,\mathrm{kHz}}$.

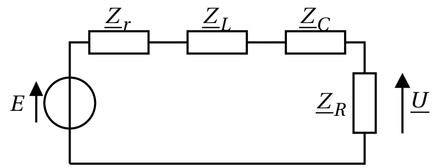
À la résonance : $\underline{U} = U_0 = \frac{RE}{R+r}$. L'amplitude vaut $\boxed{U_m = U_0 = 5,7\,\mathrm{V}}$ et le déphasage entre $e(t)$ et $u(t)$ vaut : $\boxed{\varphi = \arg(\underline{U}) = 0}$ (car $\underline{U} = U_0$ est un réel positif). Les tensions $e(t)$ et $u(t)$ sont **en phase** à la résonance.

6. La bande passante de la résonance a pour largeur : $\Delta f = \frac{f_0}{Q}$, avec $Q = \frac{1}{R+r}\sqrt{\frac{L}{C}} = 3,8$.

Le facteur de qualité est supérieur à 1 donc la résonance est plutôt **fine**. (À l'inverse la résonance est plutôt large si le facteur de qualité est inférieur à 1). On conclut que **la figure 2** correspond au circuit étudié.

Corrigé DM14

Exercice : Oscillations forcées dans un circuit électrique



1. On étudie le circuit en RSF et on applique la méthode complexe.

L'amplitude complexe de la tension aux bornes de la résistance R vaut $\underline{U} = U_m e^{j\varphi}$.

On applique la loi du pont diviseur de tension :

$$\underline{U} = \frac{RE}{R+r+jL\omega+\frac{1}{jC\omega}} \iff U_m e^{j\varphi} = \frac{RE}{R+r+j\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)} \iff \boxed{\frac{RE}{U_m}e^{-j\varphi} = R+r+j\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)}$$

On trouve l'expression attendue avec $A = R+r$ et $B = L\omega - \frac{1}{C\omega}$.

2. On identifie la partie réelle et la partie imaginaire dans l'expression obtenue :

$$\begin{cases} \frac{RE}{U_m}\cos\varphi = R+r \\ -\frac{RE}{U_m}\sin\varphi = L\omega - \frac{1}{C\omega} \end{cases} \iff \boxed{r = R\left(\frac{E}{U_m}\cos\varphi - 1\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{L = \frac{1}{C\omega^2} - \frac{RE}{\omega U_m}\sin\varphi}$$

3. On lit sur le graphe $\boxed{E = 8\,\mathrm{V}}$ et $\boxed{U_m = 4\,\mathrm{V}}$. La période des signaux vaut $T = 1\,\mathrm{ms}$ donc $\boxed{f = 1\,\mathrm{kHz}}$. On note que φ correspond au déphasage entre les tensions $e(t)$ et $u(t)$: on mesure un décalage temporel d'un huitième de période, soit $\boxed{\varphi = \frac{\pi}{4}}$.

À partir de ces valeurs on trouve : $\boxed{L = 15\,\mathrm{mH}}$ et $\boxed{r = 8,3\,\Omega}$.

4. On reprend le calcul de la question 1 : $\underline{U} = \dfrac{RE}{R+r+jL\omega+\frac{1}{jC\omega}} = \dfrac{\frac{R}{R+r}E}{1+\frac{j}{R+r}\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)}$. On identifie :

$$\boxed{U_0 = \frac{R}{R+r}E} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{Q}{\omega_0} = \frac{L}{R+r} \\ Q\omega_0 = \frac{1}{(R+r)C} \end{cases} \iff \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{L\omega_0}{R+r} = \frac{1}{R+r}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

5. On passe au module : $U_m = \dfrac{U_0}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$.

Il y a résonance si le dénominateur est minimal, ce qui se produit lorsque la parenthèse s'annule. La résonance se produit à la pulsation ω_0 donc à la fréquence $\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1,14\,\mathrm{kHz}}$.

À la résonance : $\underline{U} = U_0 = \frac{RE}{R+r}$. L'amplitude vaut $\boxed{U_m = U_0 = 5,7\,\mathrm{V}}$ et le déphasage entre $e(t)$ et $u(t)$ vaut : $\boxed{\varphi = \arg(\underline{U}) = 0}$ (car $\underline{U} = U_0$ est un réel positif). Les tensions $e(t)$ et $u(t)$ sont **en phase** à la résonance.

6. La bande passante de la résonance a pour largeur : $\Delta f = \frac{f_0}{Q}$, avec $Q = \frac{1}{R+r}\sqrt{\frac{L}{C}} = 3,8$.

Le facteur de qualité est supérieur à 1 donc la résonance est plutôt **fine**. (À l'inverse la résonance est plutôt large si le facteur de qualité est inférieur à 1). On conclut que **la figure 2** correspond au circuit étudié.